ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

А. С. Сәрсекеева

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКАНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Оқу құралы

Алматы
«Қазақ университеті»
2015

ӘОЖ 531 (075.8)
КБЖ 22.311 я 73
С 22

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесі және Редакциялық-баспа кеңесі шешімімен ұсынылған (№4 хаттама 9 сәуір 2015 жыл)

Пікір жазғандар:
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор ***А.С. Бердышев***
физика-математика ғылымдарының кандидаты, профессор ***Ж.Ә. Тоқыбетов***

Сәрсекеева А.С.
С 22 Математикалық физиканың теңдеулері: оқу құралы / А.С. Сәрсекеева. – Алматы: Қазақ университеті, 2015. – 120 б.
ISBN 978-601-04-1561-4

Оқу құралында математикалық физиканың теңдеулері курсының негізгі тараулары бойынша теориялық материалдар қысқаша баяндалған және есептердің шығарылуы толығымен көрсетілген. Оқу құралында ішек тербелісі және жылуөткізгіштік теңдеудің шығарылуы, теңдеулердің классификациясы, оларды канондық түрге келтіру, теңдеулердің шешімін құрғандағы ең жиі қолданылатын әдістер – Даламбердің сипаттауыштар әдісі, Фурье әдісі, интегралдық түрлендірулер әдісі, Грин функциясының әдісі берілген. Әрбір тараудың соңында сұрақтар, жауабымен жаттығулар және өз-өзін тексеруге арналған нұсқаулар қамтылған.

Оқу құралы «Математика» мамандығының студенттеріне арналған.

ӘОЖ 531 (075.8)
КБЖ 22.311 я 73

ISBN 978-601-04-1561-4

КІРІСПЕ

Оқу құралын басып шығарудың басты қажеттілігі студенттердің өз бетімен жұмыс істеуіне бағытталған оқытудың кредиттік технология әдістемесінің талабына байланысты.

Оқу құралында математикалық физика теңдеулерінің маңызды тараулары келтірілген, теориялық материалдар қысқаша қарастырылып, материалды игеруге арналған есептер мен бақылау сұрақтары берілген. Математикалық физиканың негізгі теңдеулері, есептердің қойылуы, шекті және бастапқы шарттардың берілу ерекшеліктері, есептерді шешу әдісін таңдауы қарастырылған. Оқу құралында ішек тербелісі теңдеуінің және жылуөткізгіштік теңдеуінің шығарылуы, теңдеулердің классификациясы, теңдеулердің шешімін құрғандағы ең жиі қолданылатын әдістер – Даламбердің сипаттауыштар әдісі, Фурье әдісі, интегралдық түрлендірулер әдісі, Грин функциясының әдісі берілген. Теориялық материалдар студенттерге оңай меңгере алатын тілмен түсіндірілген.

Оқу құралында теориялық материалдарды меңгеру үшін әрбір теорияға арнап есептер өздерінің шығару жолдарымен келтірілген. Атап айтқанда, келесі есептердің шешу мысалдары қарастырылған: теңдеулердің түрін анықтау, оларды канондық түрге келтіру, әртүрлі әдістермен теңдеулердің және есептердің шешімін табу. Әрбір тараудың соңында сұрақтар және жауабымен жаттығулар және өз-өзін тексеруге арналған нұсқаулар келтірілген. Берілген сұрақтар материалды меңгеруге мүмкіндік береді. Тәжірибе сабақтарын жүргізген кезде оқу құралындағы материалдарды пайдаланып, студенттердің өздігінен жүргізетін жұмыстары үшін осы оқу құралы көмегін бере алады.

Оқу құралындағы есеп шарттары А.В. Бицадзе және Д.Ф. Калиниченконың «Сборник задач по уравнениям математической физики» оқулығынан алынды.

Оқу құралы «Математика» мамандығының студенттеріне және жас оқытушыларға көмегін тигізе алады.

Математикалық физиканың негізгі теңдеулері

Белгісіз $u(x_1,\ldots,x_n)$ функциясын, белгісіз $x_1,\ldots,x_n$ айнымалыларды және белгісіз u функциясының дербес туындыларын байланыстыратын теңдеу *дербес туындылы дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$F\left(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},\ldots\right)=0, \quad (1.1)$$

мұндағы $\sum_{i=1}^{n}k_i=k$, F – өз аргументтерінің берілген функциясы.

Теңдеуге кіретін дербес туындының ең жоғарғы реті бұл теңдеудің *реті* деп аталады.

Екі тәуелсіз x және y айнымалылар жағдайында бірінші ретті дербес туындылы жалпы теңдеу мына түрге ие болады:

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

екінші ретті дербес туындылы жалпы теңдеу:

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0\cdot$$

1-мысал. $\frac{\partial}{\partial x}(tg\,u)-\frac{\partial u}{\partial x}sec^2 u-3u+2=0$ теңдігі дербес туындылы дифференциалдық теңдеу болады ма?

Шешуі. $\frac{\partial}{\partial x}(tg\,u)=sec^2 u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$ болғандықтан, белгісіз функцияның дербес туындысы бар қосылғыш қысқарады, сондықтан теңдік дербес туындылы теңдеу емес болып табылады.

2-мысал. $cos^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + sin^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 6\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0$ теңдеудің ретін анықтау керек.

Шешуі. $cos^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + sin^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ екендігін ескере отырып, $1 - 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 6\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0$ бірінші ретті теңдеуді аламыз.

Белгісіз функцияның жоғары ретті туындылары кіретін теңдеудің бөлігі теңдеудің *бас бөлігі* деп аталады. Егер теңдеудің бас бөлігі бас туындыларға қатысты сызықты болса, дербес туындылары бар теңдеу *квазисызықтық теңдеу* деп аталады.

Мысалы,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (1.2)$$

мұндағы a, b, c - $x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ – тәуелді функциялар, екінші ретті квазисызықтық теңдеу. Егер a, b, c коэффициенттері x және y айнымалыларынан ғана тәуелді болса, теңдеу *жоғары туындыларға қатысты сызықты* деп аталады.

Егер дербес туындылы теңдеу белгісіз функцияға және оның барлық дербес туындыларына қатысты *сызықтық* болса, ол *сызықтық* теңдеу деп аталады.

Мысалы,

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ h(x,y)u = f(x,y) \quad (1.3)$$

– екі тәуелсіз айнымалысы бар екінші ретті сызықтық теңдеудің жалпы түрі.

Егер $f(x,y)\equiv 0$ болса, сызықтық теңдеу *біртекті,* ал *егер* $f(x,y)\not\equiv 0$ болса, *біртекті емес* деп аталады.

Егер дербес туындылы теңдеу сызықтық та, квазисызықтық та болмаса, ол *сызықтық емес* теңдеу деп аталады.

3-мысал. $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3x^2u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}-f(x,y)u=0$ теңдеуінің сызықтық (біртекті немесе біртекті емес), квазисызықтық немесе сызықтық емес теңдеу екендігін анықтау керек.

Шешуі. Жоғары (екінші) ретті туындылардың коэффициенттері тәуелсіз (x) айнымалысынан, (u) белгісіз функциясынан және бірінші ретті $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$туындысынан, яғни кіші туындыдан тәуелді функциялар болып табылады, сондықтан берілген теңдеу квазисызықтық теңдеу болады.

(1.1) теңдеудің берілген облысында анықталған, осы теңдеуге кіретін өзінің дербес туындыларымен бірге үзіліссіз және оны тепе-теңдікке айналдыратын әрбір $u(x_1,\ldots,x_n)$ функциясы (1.1) теңдеудің *классикалық шешімі* деп аталады.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге физика және механиканың көптеген есептері келтіріледі.

Біз математикалық физиканың келесі теңдеулерін қарастырамыз:

а) толқындық теңдеу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(t,x,y,z), \qquad (1.4)$$

ол тербеліс процестерін зерттегенде туады.

ә) құбылыстарды тасымалдауды (жылу тасымалдау, диффузия және т.б.) зерттеу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(t, x, y, z) \qquad (1.5)$$

жылу өткізгіштік теңдеуіне келтіріледі.

б) құрылған (стационарлық) процестерді зерттеу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \qquad (1.6)$$

Пуассон теңдеуіне келтіріледі.

Дененің ішіндегі жылу көзінің жоқтығынан ($f = 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.7)$$

Лаплас теңдеуін аламыз.

Физикалық процестерді толық сипаттау үшін сол теңдеудің өзінен басқа осы процесті сипаттайтын, бұл процесс болып жатқан аймақтың шекарасындағы тәртібін (*шекаралық шарт*) және осы процестің бастапқы қалпын (*бастапқы шарт*) беру қажет.

Математикалық жағынан қарағанда бұл теңдеудің жалғыз ғана шешімі болмауымен байланысты. Нақты физикалық есептерді шешкен кезде барлық шешімдердің ішінен кейбір қосымша шарттарды қанағаттандыратын шешімді таңдау керек. Осындай қосымша шарттар бастапқы және шекаралық шарттар болып табылады.

Математикалық физиканың есебі *қисынды қойылған* деп аталады, егер шешімі:

1) бар болса;
2) жалғыз болса;
3) орнықты болса, яғни шешім есептің берілгенінен үзіліссіз тәуелді болуы керек.

1) – 3) шарттарының кез келген біреуін қанағаттандырмайтын есеп *қисынсыз қойылған* деп аталады.

Бақылау сұрақтары:

1. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің анықтамасын беріңіздер.
2. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің ретін қалай анықтайды?
3. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің шешімі деп нені атайды?
4. Қандай теңдеулер сызықтық, квазисызықтық, сызықтық емес деп аталады?
5. Математикалық физиканың негізгі теңдеулерін атаңыздар және олар қандай физикалық процестермен байланысты екенін көрсетіңіздер.
6. Қандай есептер қисынды қойылған деп аталады?

Жаттығулар

1. Төменде берілген теңдіктер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер болатынын анықтау керек:

1) $\cos\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\cos\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{\partial u}{\partial y}+\sin\frac{\partial u}{\partial x}\sin\frac{\partial u}{\partial y}=0$,

2) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=0$,

3) $\sin^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\cos^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-u=1$,

4) $\sin\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\sin\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\frac{\partial u}{\partial x}+2u=0$,

5) $\ln\left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right|-\ln\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|-\ln\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|+5u-6=0$.

Жауаптары: 1) жоқ, 2) иә, 3) жоқ, 4) жоқ, 5) жоқ.

2. Теңдеулердің ретін анықтау керек:

1) $\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$,

2) $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2xy=0$,

3) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

4) $2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2u\right)^2 - xy = 0$,

5) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2 = 0$.

Жауаптары: 1) бірінші, 2) екінші, 3) екінші, 4) бірінші, 5) екінші.

3. Келесі берілген теңдеулердің қайсысы сызықтық (біртекті немесе біртекті емес) және қайсысы сызықтық емес (квазисызықтық) болатындығын анықтау керек:

1) $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2xu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3xy\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$,

2) $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 - xy\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

3) $2\sin(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\cos y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial x} - 3u + 1 = 0$,

4) $x^2 y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2e^x y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(x^2 y^2 + 1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u = 0$,

5) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + 8x = 0$,

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 6x\frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0$,

7) $a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} +$

$+ l(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + h(x,y) = 0$,

8) $a\left(x,y,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+b\left(x,y,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}+2u\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-$

$-f(x,y)=0$,

9) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+u^2-xy=0$,

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\right)-6x\sin y=0$,

11) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)-2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-6u=0$.

Жауаптары: 1) сызықтық емес, 2) квазисызықтық, 3) сызықтық, біртекті емес, 4) сызықтық, біртекті, 5) сызықтық, біртекті емес, 6) сызықтық емес, 7) сызықтық, $h(x,y)\not\equiv 0$ жағдайында біртекті емес, 8) квазисызықтық, 9) квазисызықтық, 10) квазисызықтық, 11) сызықтық, біртекті.

Екі тәуелсіз айнымалылары бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық теңдеулердің канондық түрі

$$a\,u_{xx}+2b\,u_{xy}+c\,u_{yy}+d\,u_x+g\,u_y+h\,u+f=0 \qquad (2.1)$$

екі тәуелсіз айнымалылары бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық теңдеуді қарастырамыз. Барлық коэффициенттер x және y-тен ғана тәуелді.

Теңдеудің типі және оның канондық түрі:

$$D=b^2-ac$$

дискриминанттың таңбасымен анықталады.

$M(x_0,y_0)$ нүктесінде (2.1) теңдеуі:

– егер $M(x_0,y_0)$ нүктесінде $D>0$ болса, *гиперболалық* типті;

– егер $M(x_0, y_0)$ нүктесінде $D = 0$ болса, *параболалық* типті;
– егер $M(x_0, y_0)$ нүктесінде $D < 0$ болса, *эллипстік* типті теңдеу деп аталады.

(2.1) теңдеуін зерттейік. Бұл үшін (x, y)-тің орнына:

$$\xi = \xi(x, y),$$
$$\eta = \eta(x, y)$$

жаңа тәуелсіз айнымалыларын енгіземіз, мұндағы ξ, η – екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар әрі якобиан нөлден өзгеше:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Туындыларды ξ және η жаңа айнымалыларға түрлендіреміз:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x,$$
$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^{\ 2} + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^{\ 2} + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^{\ 2} + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^{\ 2} + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}. \quad (2.2)$$

(2.2)-ден туындылардың мәндерін (2.1)-теңдеуіне қойып, келесі теңдеуге ие боламыз:

$$\tilde{a}\, u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}\, u_{\xi\eta} + \tilde{c}\, u_{\eta\eta} + \tilde{d}\, u_\xi + \tilde{g}\, u_\eta + \tilde{h}\, u + \tilde{f} = 0, \quad (2.3)$$

мұндағы $\tilde{a} = a\,\xi_x^{\,2} + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^{\,2}$,

$\tilde{b} = a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y$,

$\tilde{c} = a\,\eta_x^{\,2} + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^{\,2}$,

$\tilde{d}\,,\tilde{g}\,,\tilde{h}\,,\tilde{f}$ арқылы айнымалыларды алмастырудан кейінгі теңдеудегі $d\,,g\,,h,\,f$ коэффициенттерін белгілейміз.

$$a\,dy^2 - 2b\,dxdy + c\,dx^2 = 0 \tag{2.4}$$

дифференциалдық теңдеуі (2.1) теңдеуінің *сипаттауыш теңдеуі* деп аталады.

(2.4) теңдеуі екі теңдеуге бөлінеді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{D}}{a} \quad \text{және} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{D}}{a}. \tag{2.5}$$

Гиперболалық типті теңдеуі үшін $D > 0$ және (2.5) теңдеуінің оң жақ бөлігі нақты және әртүрлі. Олардың жалпы интегралдары:

$$\psi_1(x,y) = C_1,\;\; \psi_2(x,y) = C_2 \tag{2.6}$$

нақты сипаттамалардың екі үйірін анықтайды.

$$\xi = \psi_1(x,y),\quad \eta = \psi_2(x,y)$$

жаңа айнымалылармен (2.3)-теңдеуі

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{2.7}$$

бірінші канондық түрге келтіріледі, мұнда $\Phi_1 = -\dfrac{\tilde{d}\,u_\xi + \tilde{g}\,u_\eta + \tilde{h}\,u + \tilde{f}}{2\tilde{b}}$, бұл жағдайда коэффициенттер

– $\tilde{a}=0$ және $\tilde{c}=0$. Гиперболалық типті теңдеулер үшін тағы екінші канондық түрі де қабылданады. (2.7) теңдеуінде

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\ \ \beta=\frac{\xi-\eta}{2}$$

ауыстыру арқылы гиперболалық типті теңдеудің

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta), \qquad (2.8)$$

екінші канондық түрін аламыз.

Параболалық типті теңдеуі үшін $D=0$, (2.5) теңдеулері және олардың ψ_1 және ψ_2 интегралдары ұқсайды. Осы жағдайда:

$$\xi=\psi_1(x,y),\ \ \eta=\varphi(x,y),$$

мұндағы φ – φ және ψ_1 сызықты тәуелді болатындай кез келген функция.

Осындай айнымалыларды таңдауда

$$\tilde{a}=a\,\xi_x{}^2+2b\,\xi_x\xi_y+c\,\xi_y{}^2=(\sqrt{a}\,\xi_x+\sqrt{c}\,\xi_y)^2=0,$$

$D=b^2-ac=0$, сондықтан $b=\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}$ болады; осыдан барып

$$\tilde{b}=a\,\xi_x\eta_x+b\,(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+c\,\xi_y\eta_y=$$
$$=(\sqrt{a}\,\xi_x+\sqrt{c}\,\xi_y)(\sqrt{a}\,\eta_x+\sqrt{c}\,\eta_y)=0.$$

(2.3) теңдеуінен параболалық типті теңдеудің

$$u_{\eta\eta}=\Phi_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \qquad (2.9)$$

канондық түрін аламыз, мұндағы $\Phi_3 = -\dfrac{\tilde{d}\, u_\xi + \tilde{g}\, u_\eta + \tilde{h}\, u + \tilde{f}}{\tilde{c}}$

немесе $\xi = \varphi(x, y),\quad \eta = \psi_1(x, y)$ деп қойсақ, онда

$$u_{\xi\xi} = \Phi_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \qquad (2.10)$$

Эллипстік типті теңдеуі үшін $D < 0$, (2.5) теңдеуі және олардың (2.6) ψ_1 және ψ_2 интегралдары комплексті түйіндес.

$$\xi = \psi_1(x, y), \quad \eta = \psi_2(x, y)$$

жаңа айнымалыларын енгізейік, ξ, η – комплекстік айнымалылар. Бұл жағдайда эллипстік типті теңдеу гиперболалық типті ($\tilde{a} = 0,\ \tilde{c} = 0$) теңдеу сияқты түрге келтіріледі. Комплекстік айнымалылармен жұмыс істемеу үшін $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$, дегенмен $\alpha = \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2}$, $\beta = \dfrac{\psi_1 - \psi_2}{2i}$ тең болатындай, α және β жаңа айнымалыларын енгіземіз.

Бұл жағдайда

$$a\,\xi_x^{\,2} + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^{\,2} = (a\,\alpha_x^{\,2} + 2b\,\alpha_x\alpha_y + c\,\alpha_y^{\,2}) - (a\,\beta_x^{\,2} + 2b\,\beta_x\beta_y +$$

$$+ c\beta_y^2) + 2i(a\,\alpha_x\beta_x + b\,(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\,\alpha_y\beta_y) = 0,$$

яғни жаңа айнымалыларда $\tilde{a} = \tilde{c}$ және $\tilde{b} = 0$.

(2.3) теңдеуі эллипстік типті теңдеудің

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad (2.11)$$

канондық түріне келтіріледі, мұндағы $\Phi_4 = -\dfrac{\tilde{d}\, u_\alpha + \tilde{g}\, u_\beta + \tilde{h}\, u + \tilde{f}}{\tilde{c}}$.

Осыған ұқсас канондық түрге

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

теңдеуі де келтіріледі, a,b,c коэффициенттері x және y тәуелсіз айнымалыларының ғана берілген функциялары болып табылады.

1-мысал. $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0$ *теңдеудің типін анықтау және оны канондық түрге келтіру керек.*

Шешуі. $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-2$, $D=\frac{9}{4}>0$, яғни теңдеу гиперболалық типті.

$$\frac{dy}{dx}=2 \quad \text{және} \quad \frac{dy}{dx}=-1$$

екі дифференциалдық теңдеулерін аламыз.

Бұл теңдеулердің жалпы шешімдері екі сипаттауыш үйірлердің теңдеулері:

$$y-2x=C_1 \quad \text{және} \quad y+x=C_2.$$

Жаңа айнымалылар енгізейік:

$$\xi=y-2x \quad \text{және} \quad \eta=y+x. \qquad (2.12)$$

ξ және η жаңа айнымалылары бойынша u-дың дербес туындылары арқылы x және y айнымалылары бойынша дербес туындыларын есептейік:

$$u_x=-2u_\xi+u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = -2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Берілген дифференциалдық теңдеуге (2.12) теңдеуінен ξ және η арқылы бейнеленген туындылар үшін табылған өрнектер және x мәнін қойып, мынаны аламыз:

$$(4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + (-2u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) -$$

$$-3(-2u_\xi + u_\eta) - 15(u_\xi + u_\eta) + 27 \cdot \frac{\eta - \xi}{3} = 0$$

немесе

$$u_{\xi\eta} + u_\xi + 2u_\eta + \xi - \eta = 0,$$

яғни теңдеу канондық түрге келтірілді.

2-мысал. $sin^2 x \cdot u_{xx} - 2y \sin x \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy} = 0$ *теңдеуін канондық түрге келтіру керек.*

Шешуі. $a = sin^2 x$, $b = -y \sin x$, $c = y^2$.

$D = b^2 - ac = y^2 sin^2 x - y^2 sin^2 x = 0$ болғандықтан, берілген теңдеу параболалық типті.

Сипаттауыш теңдеудің түрі:

$$sin^2 x \cdot dy^2 + 2y \sin x \cdot dxdy + y^2 \cdot dx^2 = 0$$

немесе

$$(\sin x \cdot dy + y \cdot dx)^2 = 0.$$

$sin\,x \cdot dy + y \cdot dx = 0$ теңдеуінде айнымалыларды бөліп және интегралдап біз мынаған ие боламыз:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{sin\,x} = 0$$

$$ln\,y + ln\,tg\frac{x}{2} = ln\,C$$

$$y \cdot tg\frac{x}{2} = C.$$

Айнымалыларды ауыстырамыз, жаңа айнымалылардың бірі теңдеудің $\xi = y \cdot tg\frac{x}{2}$ интегралы болып табылады, екінші ретінде кез келген сызықтық ξ-ден тәуелсіз функцияны алуға болады, мысалы, $\eta = y$.

Сызықтық тәуелсіздік шарты x, y айнымалыларынан ξ, η айнымалыларына көшу якобианның нөлге тең еместігі болып табылады.

$\xi_x = \dfrac{y}{2cos^2\frac{x}{2}}$, $\eta_x = 0$, $\xi_y = tg\dfrac{x}{2}$, $\eta_y = 1$ болғандықтан,

$$\xi_{xx} = \frac{y \cdot tg\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}},\quad \xi_{xy} = \frac{1}{2cos^2\frac{x}{2}},\ \xi_{yy} = \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0,$$

онда ξ және η жаңа айнымалылары u функциясының дербес туындылары арқылы x және y айнымалылары бойынша дербес туындылары мына формулалармен өрнектеледі:

$$u_x = \frac{y}{2cos^2\frac{x}{2}} \cdot u_\xi,\ u_y = tg\frac{x}{2} \cdot u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx}=\frac{y^2}{4cos^4\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\xi}+\frac{y\cdot tg\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi},$$

$$u_{xy}=\frac{y\cdot tg\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\xi}+\frac{y}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\eta}+\frac{1}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi},$$

$$u_{yy}=tg^2\frac{x}{2}\cdot u_{\xi\xi}+2tg\frac{x}{2}\cdot u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\cdot$$

Берілген дифференциалдық теңдеуге екінші ретті туындыларды қойып, келесі теңдеуге келеміз:

$$sin^2 x\cdot\left(\frac{y^2}{4cos^4\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\xi}+\frac{y\cdot tg\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi}\right)-2y\,sin\,x\cdot\left(\frac{y\cdot tg\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{y}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi\eta}+\frac{1}{2cos^2\frac{x}{2}}\cdot u_{\xi}\right)+y^2\cdot\left(tg^2\frac{x}{2}\cdot u_{\xi\xi}+2tg\frac{x}{2}\cdot u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)=0\cdot$$

Арифметикалық амалдар процесінде $u_{\xi\xi}$ және $u_{\xi\eta}$ туындыларынан тұратын мүшелер, өзара қысқарылады және теңдеу мына түрге ие болады:

$$y^2\cdot u_{\eta\eta}+\left(\frac{y\cdot tg\frac{x}{2}\cdot sin^2 x}{2cos^2\frac{x}{2}}-\frac{y\cdot sin\,x}{cos^2\frac{x}{2}}\right)\cdot u_{\xi}=0$$ немесе

$$y\cdot u_{\eta\eta}-sin\,x\cdot u_{\xi}=0\cdot$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ tg\frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}, \text{ демек, } \sin x = \frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Ақырында теңдеудің

$$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot u_{\xi} = 0$$

канондық түрін аламыз.

3-мысал. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$ *теңдеудің типін анықтау және оны канондық түрге келтіру керек.*

Шешуі. $a = 1,\ b = 1,\ c = 5,\ D = -4 < 0$ – теңдеу барлық жерде эллипстік типті. $\frac{dy}{dx} = 1 \pm 2i$ екі теңдеуге бөлінетін

$$dy^2 - 2dxdy + 5dx^2 = 0$$

сипаттауыш теңдеуін құраймыз.

Интегралдап, $y - x - 2ix = C_1$ және $y - x + 2ix = C_2$ комплекстік сипаттауыштардың екі үйірін аламыз.

Жаңа айнымалылар ретінде интегралдардың нақты $\xi = y - x$ және $\eta = 2x$ жорамал бөліктерін таңдау арқылы

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 8u = 0$$

теңдеудің канондық түрін аламыз.

Теңдеудің кез келген типін одан әрі ықшамдау үшін шешімді мынадай түрде іздеу керек:

$$u = F(\xi, \eta)v. \tag{2.13}$$

Мұндай алмастыру v -ға қатысты теңдеу бір немесе екі u_ξ және u_η туындылары жоқ болатындай F функциясына шарт алуға көмектеседі.

Егер теңдеудегі коэффициенттер тұрақты болса, онда теңдеуге

$$F = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \tag{2.14}$$

функциясын қойып және λ және μ таңдау арқылы гиперболалық, параболалық және эллипстік типті теңдеуді сәйкесінше мына түрге келтіруге болады:

$$v_{\xi\eta} + \gamma v + f = 0,$$
$$v_{\xi\xi} + \delta v_\eta + f = 0,$$
$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f = 0.$$

Егер гиперболалық типті теңдеудің γ және f коэффициенттері нөлге тең болса,

$$v_{\xi\eta} = 0, \tag{2.15}$$

онда оның (ξ,η) барлық жазықтығындағы жалпы шешімі мына түрге келеді:

$$v(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{2.16}$$

f_1 және f_2 – кез келген функциялар. (x, y) алғашқы айнымалыларға және u функциясына қайтып оралсақ, мынаны аламыз:

$$u(x, y) = [f_1(\xi(x, y)) + f_2(\eta(x, y))]F(x, y). \tag{2.17}$$

Коши есебі үшін f_1 және f_2 функцияларының дербес түрі (x, y) жазықтығының сызығында берілген бастапқы шарттар бойынша анықталуы мүмкін.

4-мысал. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0$ теңдеуін канондық түрге келтіріп және одан әрі ықшамдалуын жасау керек.

Шешуі. Берілген теңдеудің сипаттауыш теңдеуі мына түрге ие $-2dxdy - 4dx^2 = 0$, ол екі теңдеуге бөлінеді: $dx = 0$ және $dy + 2dx = 0$. Интегралдап, $x = C_1$ және $y + 2x = C_2$ аламыз. Жаңа айнымалылар ретінде $\xi = x$ және $\eta = y + 2x$ таңдап,

$$2u_{\xi\eta} + u_\xi + u + \xi = 0$$

теңдеудің канондық түрін аламыз.

(2.13) және (2.14) формулаларынан, егер теңдеудегі коэффициенттер тұрақты болса, теңдеудің одан әрі ықшамдалуы үшін шешімді мына түрде іздеу керек:

$$u(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v(\xi,\eta). \qquad (2.18)$$

Мұндай ауыстыруда мыналарды аламыз:

$$u_\xi = \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v + e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v_\xi = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda v + v_\xi),$$

$$u_\eta = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v + e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\mu v + v_\eta),$$

$$u_{\xi\xi} = \lambda e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda v + v_\xi) + e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda v_\xi + v_{\xi\xi}) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda^2 v + 2\lambda v_\xi + v_{\xi\xi})$$

$$u_{\eta\eta} = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\mu v + v_\eta) + e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\mu v_\eta + v_{\eta\eta}) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\mu^2 v + 2\mu v_\eta + v_{\eta\eta})$$

$$u_{\xi\eta} = \mu e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda v + v_\xi) + e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda v_\eta + v_{\xi\eta}) =$$
$$= e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot (\lambda\mu v + \mu v_\xi + \lambda v_\eta + v_{\xi\eta}). \qquad (2.19)$$

u функциясы үшін (2.18) және ауыстыруынан кейін оның туындылары үшін (2.19) өрнектерді берілген теңдеуге қойып, алатынымыз:

$$2e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot(\lambda\mu v+\mu v_{\xi}+\lambda v_{\eta}+v_{\xi\eta})+e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot(\lambda v+v_{\xi})+e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v+\xi=0$$

немесе

$$2v_{\xi\eta}+(2\mu+1)v_{\xi}+2\lambda v_{\eta}+(2\lambda\mu+\lambda+1)v+e^{-\lambda\xi-\mu\eta}\cdot\xi=0.$$

Бірінші ретті туындылардың коэффициенттерін нөлге айналдыратындай λ және μ таңдап аламыз: $2\mu+1=0$, $2\lambda=0$. Табылған $\mu=-\frac{1}{2}$, $\lambda=0$ параметрлерінің мәнін қойып, теңдеуді ықшамдаймыз:

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{2}v+\frac{\xi}{2}\cdot e^{\frac{\eta}{2}}=0,$$

яғни v: $u(\xi,\eta)=e^{-\frac{\eta}{2}}\cdot v(\xi,\eta)$ функциясы үшін v_{ξ} және v_{η} туындылары жоқ теңдеу аламыз.

Бақылау сұрақтары:

1. Екі айнымалысы бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыздар.
2. Екі айнымалысы бар екінші ретті гиперболалық, эллипстік және параболалық теңдеулердің сипаттамаларының айырмашылығы неде?

Жаттығулар

1. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_{x}+u_{y}-u=0$ *теңдеудің типін анықтау және оны канондық түрге келтіру керек.*

Жауабы: $u_{\eta\eta}+2u_{\xi}+u_{\eta}-u=0$.

2. а) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ *(Трикоми теңдеуі)*

ә) $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0$

гиперболалық, параболалық және эллипстік аймақтарын табу және оларды канондық түрге келтіру керек.

Жауабы: а) жазықтықтың әртүрлі облыстарында теңдеудің типі әртүрлі. Дискриминант және сипаттаманы есептеп, x өсінде теңдеудің параболалық екендігін аламыз; $y<0$ жағдайында гиперболалық және $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ координаталарында мына түрге келеді $u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$;

$y>0$ жағдайында эллипстік және $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$ координаталарында $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0$ түріне ие болады;

ә) $x>0$ болғанда теңдеу гиперболалық

$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$, $\xi = y - x + 2\sqrt{x}$, $\eta = y - x - 2\sqrt{x}$;

$x<0$ жағдайында эллипстік $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0$, $\xi = y - x$, $\eta = 2\sqrt{-x}$;

$x=0$ жағдайында параболалық және $u_{yy} = 0$ канондық түрі болады.

n тәуелсіз айнымалылары бар ($n>2$) дербес туындылы сызықтық теңдеулердің канондық түрі және оларды кластарға бөлу

R^n – $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нүктелерінің n өлшемді Евклид кеңістігі болсын.

D – R^n -дегі аймақ.

n тәуелсіз айнымалылары бар дербес туындылы сызықтық теңдеуді қарастырайық:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f, \qquad (3.1)$$

мұндағы A_{ij}, B_i, C, f – x-ке тәуелді берілген функциялар. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ нақты параметрлерге қатысты

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \qquad (3.2)$$

квадраттық тұлғасы (3.1) теңдеуіне сәйкес *сипаттауыш тұлға* деп аталады.

$x\in D$ әрбір нүктесіндегі $Q(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ квадраттық тұлғасын $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $i=1,2,\ldots,n$ айнымалылардың айрықша емес түрлендіру көмегімен канондық түрге келтіруге болады деп болжайық:

$$Q(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^{\,2}, \qquad (3.3)$$

мұндағы α_i коэффициенттері $1,-1,0$ мәндерін қабылдайды.

(3.3)-гі Q тұлғасының теріс және нөлдік коэффициенттерінің саны оны канондық тұлғаға келтіру тәсілдерінен тәуелді емес.

D аймағындағы (3.1) сызықтық теңдеуі:

1) егер $x\in D$ әрбір нүктесінде (3.3) тұлғасының $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ коэффициенттері нөлден өзгеше және бір таңбалы болса, онда *эллиптикалық;*

2) егер $x \in D$ әрбір нүктесінде (3.3) тұлғасының $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ коэффициенттері нөлден өзгеше және барлығы бір таңбалы емес болса, онда *гиперболалық;*

3) егер $x \in D$ әрбір нүктесінде (3.3) тұлғасының $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ коэффициенттерінің ең болмаса біреуі нөлге тең болса, онда *параболалық* деп аталады.

Тұрақты коэффициенттері бар (3.1) теңдеуін қарастырайық:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \qquad (3.4)$$

A_{ij}, B_i, C – тұрақтылар. Оны канондық түрге келтірейік.

Егер (3.4) теңдеуінде

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i, \; j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.5)$$

формуласы бойынша жаңа тәуелсіз айнымалыларға көшетін болсақ, бас мүшелердің $\{ \overline{A}_{ij} \}$ коэффициенттер матрицасы түрленген теңдеудің

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{A}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \overline{C} u = f(y) \qquad (3.6)$$

$\{ A_{ij} \}$ матрицасы

$$\{ \overline{A}_{ij} \} = \{ \alpha_{ij} \} \cdot \{ A_{ij} \} \cdot \{ \alpha_{ij} \}^T \qquad (3.7)$$

арақатысымен байланысты болады, мұндағы $\{ \alpha_{ij} \}^T$ – $\{ \alpha_{ij} \}$ матрицасының аударылған матрицасы.

Егер (3.2) квадраттық тұлғада жаңа коэффициенттерге

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{*} \xi_j, \tag{3.8}$$

мұндағы $\alpha_{ij}^{*} = \alpha_{ji}$ формуласы бойынша көшсек, $\{ A_{ij} \}$ матрицасы (3.2) квадраттық тұлғасының матрицасы сияқты түрленеді ((3.4) теңдеуіне сәйкес болатын квадраттық *сипаттауыш тұлғаның* A_{ij} коэффициенттері тұрақты).

(3.2)-дегі квадраттық тұлғада $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ жаңа айнымалылардан $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ескі айнымалыларға көшу матрицасы (3.4) теңдеуіндегі ескі тәуелсіз $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларынан $y_1, y_2, \ldots, y_n$ жаңа айнымалыларына көшу матрицасына аударудан алынады.

Сонымен, (3.4) теңдеуін канондық түрге келтіретін, (3.5) түрлендіруін табу үшін $1, -1, 0$ коэффициентерімен $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ айнымалыларының квадраттары ғана бар (3.2) квадраттық тұлғасын канондық түрге келтіретін (3.8) түрлендіруін табу, яғни (3.3) канондық түріне келтіру қажет. (3.5) түрлендіру матрицасы (3.8) түрлендіру матрицасын аударудан алынады.

1-мысал. Теңдеулердің типін анықтау керек:

а) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2u = 0;$

ә) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2xy\frac{\partial u}{\partial x} + 3xu = 0;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \cdot$

Шешуі. а) $Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=4\lambda_1^2+2\lambda_2^2-6\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_2+10\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2\lambda_3=$ $=\frac{1}{4}(4\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3)^2-\frac{1}{4}(\lambda_2+7\lambda_3)^2$ сәйкес квадраттық түлғасы

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\xi_1-\frac{3}{2}\xi_2+4\xi_3,\ \lambda_2=2\xi_2-7\xi_3,\ \lambda_3=\xi_3$$

ерекше емес ауыстыру нәтижесінде

$$K(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2-\xi_2^2$$

канондық түріне келтіріледі. Осыдан барып, теңдеу параболалық типті.

ә) $Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2-4\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1\lambda_3+4\lambda_2^2+\lambda_3^2=$ $=(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)^2+(\lambda_2+\lambda_3)^2-(\lambda_2-\lambda_3)^2$

квадраттық түлғасы

$$\lambda_1=\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{3}{2}\mu_3,\ \lambda_2=\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3),\ \lambda_3=\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)$$

ерекше емес ауыстыру нәтижесінде

$$K(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=\mu_1^2+\mu_2^2-\mu_3^2$$

канондық түріне келтіріледі. Гиперболалық типті теңдеу.

б) $Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2$ тиісті квадраттық түлғасы оң анықталған.

Мұны $Q=a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+2a_{13}\lambda_1\lambda_3+a_{22}\lambda_2^2+2a_{23}\lambda_2\lambda_3+a_{33}\lambda_3^2$ тиісті оң анықталған квадраттық түлғасының Сильвестр критерийі көмегімен тексеруге болады.

Сильвестр критерийі – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрицасының $A_{11} = a_{11}$, $A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ барлық бас диагоналдар минорларының оң болуы.

$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ квадраттық форманың $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ коэффициенттер матрицасының бас диагоналдар минорлары оң:

$A_{11} = 1 > 0$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ квадраттық формасының оң анықталғанынан теңдеудің эллипстік типті екендігі шығады.

2-мысал. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$ теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

Шешуі. Берілген теңдеуге

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + \lambda_3^2$$

түріне келтірілетін сипаттауыш квадраттық тұлға

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2$$

сәйкес келеді.

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2,\ \mu_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3,\ \mu_3 = \lambda_3$$

белгілеулері арқылы $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$ квадраттық түлғасының канондық түрін аламыз. Теңдеу эллипстік типті.

$\lambda_1=\mu_1-\mu_2+2\mu_3$, $\lambda_2=\mu_2-2\mu_3$, $\lambda_3=\mu_3$ болғандықтан, $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ матрицасын аламыз.

Демек, оған аударылған матрицасының түрі: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ және ξ,η,ζ жаңа айнымалыларын $\xi=x$, $\eta=-x+y$, $\zeta=2x-2y+z$ формулалары бойынша енгіземіз.

Жаңа айнымалылардағы дербес туындыларды келесі формулаларды пайдаланып табамыз:

$$u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x+u_\zeta\cdot\zeta_x,$$
$$u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y+u_\zeta\cdot\zeta_y,$$
$$u_z=u_\xi\cdot\xi_z+u_\eta\cdot\eta_z+u_\zeta\cdot\zeta_z,$$
$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x{}^2+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x{}^2+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_x{}^2+2u_{\xi\eta}\cdot\xi_x\eta_x+2u_{\xi\zeta}\cdot\xi_x\zeta_x+$$
$$+2u_{\eta\zeta}\cdot\eta_x\zeta_x+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_\eta\cdot\eta_{xx}+u_\zeta\cdot\zeta_{xx},$$
$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_y{}^2+u_{\eta\eta}\cdot\eta_y{}^2+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_y{}^2+2u_{\xi\eta}\cdot\xi_y\eta_y+2u_{\xi\zeta}\cdot\xi_y\zeta_y+$$
$$+2u_{\eta\zeta}\cdot\eta_y\zeta_y+u_\xi\cdot\xi_{yy}+u_\eta\cdot\eta_{yy}+u_\zeta\cdot\zeta_{yy},$$
$$u_{zz}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_z{}^2+u_{\eta\eta}\cdot\eta_z{}^2+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_z{}^2+2u_{\xi\eta}\cdot\xi_z\eta_z+2u_{\xi\zeta}\cdot\xi_z\zeta_z+$$
$$+2u_{\eta\zeta}\cdot\eta_z\zeta_z+u_\xi\cdot\xi_{zz}+u_\eta\cdot\eta_{zz}+u_\zeta\cdot\zeta_{zz},$$
$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x\xi_y+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x\eta_y+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_x\zeta_y+u_{\xi\eta}\cdot(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+$$
$$+u_{\xi\zeta}\cdot(\xi_x\zeta_y+\xi_y\zeta_x)+u_{\eta\zeta}\cdot(\eta_x\zeta_y+\eta_y\zeta_x)+u_\xi\cdot\xi_{xy}+u_\eta\cdot\eta_{xy}+u_\zeta\cdot\zeta_{xy}$$
$$u_{xz}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x\xi_z+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x\eta_z+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_x\zeta_z+u_{\xi\eta}\cdot(\xi_x\eta_z+\xi_z\eta_x)+$$

$$+u_{\xi\zeta}\cdot(\xi_x\zeta_z+\xi_z\zeta_x)+u_{\eta\zeta}\cdot(\eta_x\zeta_z+\eta_z\zeta_x)+u_\xi\cdot\xi_{xz}+u_\eta\cdot\eta_{xz}+u_\zeta\cdot\zeta_{xz}$$

$$u_{yz}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_y\xi_z+u_{\eta\eta}\cdot\eta_y\eta_z+u_{\zeta\zeta}\cdot\zeta_y\zeta_z+u_{\xi\eta}\cdot(\xi_y\eta_z+\xi_z\eta_y)+$$

$$+u_{\xi\zeta}\cdot(\xi_y\zeta_z+\xi_z\zeta_y)+u_{\eta\zeta}\cdot(\eta_y\zeta_z+\eta_z\zeta_y)+u_\xi\cdot\xi_{yz}+u_\eta\cdot\eta_{yz}+u_\zeta\cdot\zeta_{yz}.$$

Сонда аламыз

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+4u_{\zeta\zeta}-2u_{\xi\eta}+4u_{\xi\zeta}-4u_{\eta\zeta};$$

$$u_{yy}=u_{\eta\eta}+4u_{\zeta\zeta}-4u_{\eta\zeta};$$

$$u_{zz}=u_{\zeta\zeta};$$

$$u_{xy}=-u_{\eta\eta}-4u_{\zeta\zeta}+u_{\xi\eta}-2u_{\xi\zeta}+4u_{\eta\zeta};$$

$$u_{yz}=-2u_{\zeta\zeta}+u_{\eta\zeta}.$$

Екінші туындылардың мағынасын теңдеуге қою арқылы оны канондық түрге келтіреміз $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0$.

Бақылау сұрақтары:

1. *n* тәуелсіз айнымалылары бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыздар.
2. *n* тәуелсіз айнымалылары бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеуге сәйкес келетін сипаттауыш түлға деп нені атайды?
3. *n* тәуелсіз айнымалылары бар екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеудің типі қалай анықталады?

Жаттығулар

1. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+14\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+4\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+16\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}+6\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}=0$ теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

Жауабы: $\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2v}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2v}{\partial\zeta^2}=0$, $\xi=x+2y+3z$, $\eta=y+2z$, $\zeta=z$.

2. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0$ теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

Жауабы: $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}=0$, $\xi = x-y+z$, $\eta = x-y$, $\zeta = 2z$.

3. $u_{xx}+4u_{xy}-3u_{zz}=0$ теңдеуді канондық түрге келтіру керек.

Жауабы: $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-3u_{\zeta\zeta}=0$, $\xi = x$, $\eta=-x+\frac{1}{2}y$, $\zeta = z$.

Гиперболалық теңдеулер. Сипаттамалар әдісі

1. Даламбер теңдеуін қорыту

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t),\ x\in[0,l],\ t>0, \quad (4.1)$$

Даламбер теңдеуі керілген ішектің аз көлденең тербелістерін және ішектің серпімділік бойлық тербелістерін суреттейді.

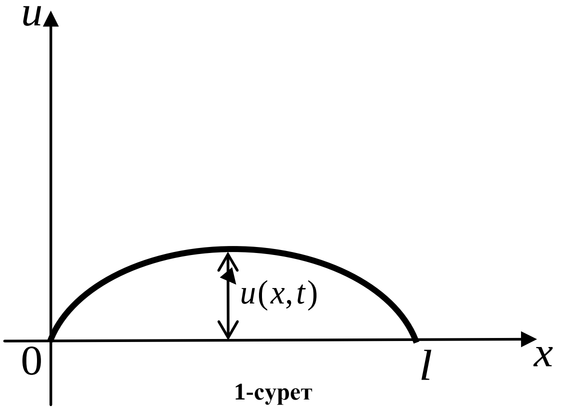
Ішектің көлденең тербелістері

Ішек деп иілуге қарсы болмайтын, оның ұзындығының өзгерісімен байланысты емес жіңішке жіпті атайды.

Ұзындығы l ішек T күшімен тартылған болсын. Тепе-теңдік жағдайда тұрған ішекті Ox өсін жағалай бағыттайық. $x=0$ ішектің сол жақ соңы, $x=l$ ішектің оң жақ соңы болсын.

$u(x,t)$ арқылы ішектің t уақытындағы x нүктесінің жылжуын белгілейік.

Ox өсіне перпендикуляр Ou өсін алайық және x-тің әрбір нүктесі Ou өсі бойымен ғана жылжығанда ішектің көлденең тербелісін қарастырамыз. $u(x,t)$ функциясының графигі әрбір



1-сурет

t белгіленген мағынасында ішектің осы уақыттағы тұлғасын береді (1-сурет).

Ішектің тек аз тербелісін қарастырып, $u(x,t)$-жылжуы, сонымен қатар $u_x(x,t)$ туындысы да сонша аз деп санаймыз, теңдеуді қорытындылау процесінде олардың квадраттарын өздерінің бұл шамалармен салыстырғанда елемеуге болады. Ішектің иілуге қарсы болмайтындығынан, оның $T(x,t)$ керілуі ішекке жанама бойымен x нүктесінде бағытталған. Ішектің $[x_1, x_2]$ кез келген бөлігін ерекшелейік (2-сурет). Ішек бөлігінің M_1M_2 доғасының ұзындығы мынаған тең:

$$S = \int\limits_{M_1M_2} dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}\,dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

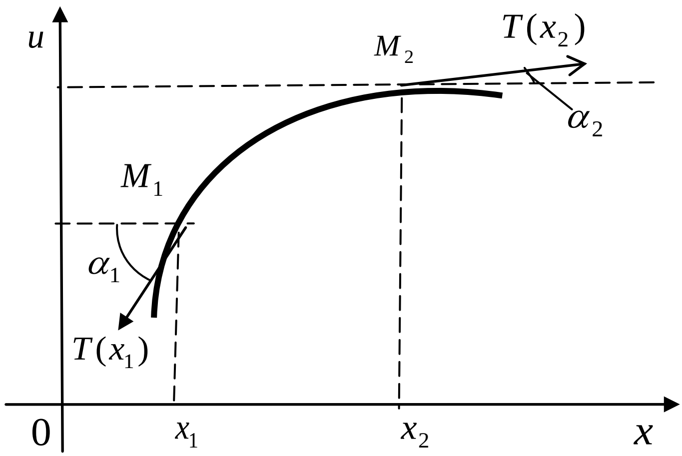
($(u_x)^2 << 1$ болғандықтан).

Бұл ішектің тербеліс процесіндегі бөліктерінің ұзартылуы болмайды, демек, Гук заңының күшімен T керілісінің шамасы әрбір нүктеде уақыт бойынша өзгермейді. T керілісінің x-тен де тәуелсіз екендігін көрсетеміз, яғни $T(x) = T_0 \equiv const$.

α - $u(x,t)$ қисығына жанаманың және Ox өсіне оң бағытының арасындағы бұрыш. Тербелістің аз болуынан

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \approx 1,$$

$$sin\alpha \approx \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \approx u_x.$$



2-сурет

Ox және Ou өстеріне T керілуінің сәйкесінше T_x және T_u проекцияларын табайық:

$$T_x(x) = T(x)\cdot cos\alpha \approx T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\cdot sin\alpha \approx T(x)\cdot u_x.$$

Ішектің $[x_1, x_2]$ элементіне керілу күші әсер етеді, сыртқы күштері және инерция күштері. Даламбер принципі бойынша барлық проекциялардың қосындысы нөлге тең болуы керек. Біз тек қана көлденең тербелістерді қарастырамыз, сондықтан сыртқы күштер және инерция күштерін Ou өсінің бойымен бағытталған деп санауға болады, онда $T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0$ немесе $T(x_1) = T(x_2)$.

Осыдан x_1 және x_2-нің кез келген болғандығынан барып, керілістің x-тен тәуелсіз екендігі шығады, яғни x және t-ның барлық мағыналары үшін

$$T(x) \equiv T_0.$$

Ішектің $[x_1, x_2]$ элементіне әсер ететін Ou өсіне керілу күшінің проекциясы тең:

$$T_u(x_2) - T_u(x_1) \approx T_0 \cdot [u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)].$$

$u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx$ екендігін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$T_u(x_2) - T_u(x_1) \approx T_0 \cdot \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx. \qquad (4.2)$$

$p(x,t)$ – сыртқы күштердің үзіліссіз сызықтық тығыздығы. Онда Ou өсі бойымен ішектің M_1M_2 бөлігіне

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t) dx \qquad (4.3)$$

күші әсер етеді.

$\rho(x)$ – ішектің үзіліссіз сызықтық тығыздығы, онда ішек бөлігінің массасы $m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$. Ішектің M_1M_2 бөлігінің Ou өсіне инерция күші проекциясы Ньютонның екінші заңы бойынша мынаған тең болады:

$$-m \cdot u_{tt} = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \cdot u_{tt} dx. \qquad (4.4)$$

Ішектің M_1M_2 бөлігіне әсер ететін, барлық күштердің Ou өсіне проекциясы: (4.2) керілу күші, (4.3) сыртқы күш және (4.4) инерция күші, мынадай түрге ие болады:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0 \cdot u_{xx} + p(x,t) - \rho(x)\cdot u_{tt}\right]dx = 0\cdot$$

Осыдан интеграл ішіндегі функцияның үзіліссіздігінен және x_1 және x_2-нің кез келгендігінен, ішектің әрбір нүктесі үшін t кез келген уақытында:

$$\rho(x)\cdot u_{tt} = T_0 \cdot u_{xx} + p(x,t)\cdot \qquad (4.5)$$

Бұл *ішек тербелісінің еріксіз теңдеуі* болады.

Егер $\rho = const$ болса (4.5) теңдеуі төмендегіше түрленеді:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad (4.6)$$

мұндағы

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}\cdot \qquad (4.7)$$

Егер сыртқы күш жоқ болса, онда $p(x,t) = 0$, *ішектің еркін тербелісінің теңдеуін* аламыз:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\cdot \qquad (4.8)$$

Ішектің тербелу процесін бірмәнді анықтау үшін есептің физикалық мағынасынан шығатын теңдеуден басқа қосымша шарттар беру қажет. Бастапқы уақытта ішектің барлық нүктелерінде u бастапқы жағдай және u_t бастапқы жылдамдықты беру қажет:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{4.9}$$

мұндағы $\varphi(x), \psi(x)$ – берілген функциялар. Бұл шарттар *бастапқы шарттар* деп аталады.

Шектелген ішек, яғни l ақырлы ұзындығы бар ішек жағдайында соңында режим беру қажет (*шекаралық шарт*).

Егер ішектің соңы бекітілген болса, соңындағы жылжулар нөлге тең және шекаралық шарт төмендегіше түрленеді:

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \quad (t \geq 0). \tag{4.10}$$

Егер ішектің соңы берілген заң бойынша жылжыса, шекаралық шарт мына түрге ие болады:

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u\big|_{x=l} = \mu_2(t), \tag{4.11}$$

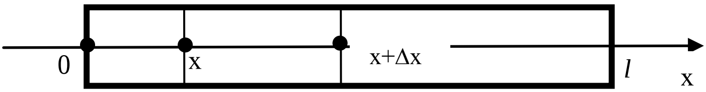
мұндағы $\mu_1(t), \mu_2(t)$ – t уақыты бойынша берліген функциялар.

Ішектің шексіз немесе жартылай шексіз тербелісін қарастыруға болады. Шекарадан жеткілікті алшақ нүктеде сонда берілген шекаралық шарттардың әсері, уақыттың жеткілікті үлкен аралығы арқылы білінеді. Егер шекараның әсері елеусіз болмағанда, уақыттың аз аралығы ағымында құбылысты қарастырсақ, шектелмеген аймақ үшін есептің қойылуына келеміз. Егер бір шекараға жақын құбылысты зерттесек және екінші шекарада шекаралық режимнің әсері уақыттың қызықтыратын ағымында елеусіз болса, жартылай шектелген түзудегі есептің қойылуына келеміз.

Стерженнің бойлық тербелістері

l ұзындығы бар стерженді қарастырайық. Ox өсін оның сол жақ соңы $x = 0$ нүктесінде, оң жақ соңы $x = l$-да болатындай етіп стерженнің бойымен бағыттайық. Стерженнің кіші бойлық тербелістерін зерттейік.

Сыртқы күштер мен инерцияның күштерін стерженнің бойымен бағытталған деп есептеуге болады.



$u(x,t)$ арқылы x абсциссасымен t уақытында Ox өсі бойымен стержен қимасының ығысуын белгілейік. Онда $x+\Delta x$ нүктесінде қиманың ығысуы:

$$u(x+\Delta x,t) \approx u(x,t) + u_x(x,t)\cdot \Delta x.$$

Сондықтан x қимасындағы стерженнің салыстырмалы ұзаруы $u_x(x,t)$-ке тең болады. Гук заңы бойынша бұл қимадағы керілу:

$$T = ES\cdot u_x(x,t),$$

мұндағы S – көлденең қиманың ауданы, E – стержен материалының серпімділік модулі.

Егер $[x, x+\Delta x]$ бөлігіне әсер ететін, барлық күштердің қосындыларын нөлге теңестіретін болсақ, стержен тербелісінің теңдеуін аламыз. Тең әсер ететін керілу күштері мынаған тең:

$$T(x+\Delta x) - T(x) = ES\cdot\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] \approx ES\cdot u_{xx}(x,t)\cdot\Delta x.$$

$p(x,t)$ – сыртқы күштердің көлемдік тығыздығы. Онда $[x, x+\Delta x]$ стерженнің элементіне $S\cdot\Delta x\cdot p(x,t)$ сыртқы күш және $-\rho(x)\cdot S\cdot\Delta x\cdot u_{tt}(x,t)$ инерция күші әсер етеді. Даламбер принципі бойынша барлық күштердің қосындысы нөлге тең, яғни

$$\left[ES\cdot u_{xx}(x,t) + S\cdot p(x,t) - \rho(x)\cdot S\cdot u_{tt}(x,t)\right]\cdot\Delta x = 0. \quad (4.12)$$

Осыдан

$$\rho(x)\cdot u_{tt}(x,t)=E\cdot u_{xx}(x,t)+p(x,t). \qquad (4.13)$$

Егер $\rho(x)=\rho=const$ (біртекті стержен) болса, онда (4.13) теңдеуі төмендегіше түрленеді:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),$$

мұндағы

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}},\quad f(x,t)=\frac{p(x,t)}{\rho}. \qquad (4.14)$$

2. Толқындық теңдеу үшін Даламбердың сипаттауыштар әдісі

Шектелмеген ішек үшін тербеліс теңдеуін қарастырайық:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0. \qquad (4.15)$$

Бұл гиперболалық типті теңдеу $-\ D=a^2>0$.

Сипаттауыш теңдеуі

$$dx^2-a^2dt^2=0$$

екі теңдеуге бөлінеді: $dx-a\cdot dt=0$, $dx+a\cdot dt=0$, олардың интегралдары түзу:

$$x-at=C_1,\quad x+at=C_2.$$

Жаңа айнымалылар

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at \qquad (4.16)$$

енгізе отырып, (4.15) ішек тербелісінің теңдеуін келесі түрге түрлендіреміз:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4.17}$$

(4.17) теңдеуін мына түрде жазамыз:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0. \tag{4.18}$$

(4.18)-дегі ξ параметр ретінде қарастыра отырып, $\dfrac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi} = f(\xi)$ аламыз, мұндағы $f(\xi)$ – ξ айнымалысының ғана кез келген функциясы. ξ бойынша алынған теңдеуді интегралдап және η параметр түрінде қарастырып табамыз:

$$u(\xi,\eta) = \int f(\xi)d\xi + f_2(\eta),$$

мұндағы $f_2(\eta)$ – η айнымалысының ғана кез келген функциясы.

$\int f(\xi)d\xi = f_1(\xi)$ болсын, онда $u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, немесе x және t ескі айнымалыларына қайта оралсақ,

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \tag{4.19}$$

Егер f_1 және f_2 – екі рет үзіліссіз дифференциалданатын кез келген функциялар болса, (4.19) формуласымен анықталатын $u(x,t)$ функциясы (4.15) теңдеуінің шешімі болатынын тексеру оңай.

Шынымен,

$$u_{xx}(x,t) = f_1''(x-at) + f_2''(x+at),$$
$$u_{tt}(x,t) = a^2 f_1''(x-at) + a^2 f_2''(x+at).$$

Демек, (4.19) функциясы (4.15) теңдеуін қанағаттандырады.

1-мысал. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ теңдеуін сипаттауыштар әдісімен шешу керек.

Шешуі. $b^2 - ac = 0$, демек, берілген теңдеу параболалық типті.

Сипаттауыш теңдеуі мына түрге

$x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = 0$ немесе $(xdy + ydx)^2 = 0$ ие болады.

$xdy + ydx = 0$ теңдеуінде айнымалыларды бөліп және интегралдап, келесі түрге келеміз:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y + \ln x = \ln C, \quad xy = C.$$

Айнымалыларды ауыстырайық:

$$\xi = xy, \quad \eta = x.$$

Онда

$$u_x = yu_\xi + u_\eta,\ u_y = xu_\xi,\ u_{xx} = y^2u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = xyu_{\xi\xi} + xu_{\xi\eta} + u_\xi, \quad u_{yy} = x^2u_{\xi\xi}.$$

Теңдеуге туындылар үшін табылған өрнектерді және $x = \eta$ мағынасын қойып, мынаны аламыз:

$$\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

$u_\eta(\xi,\eta)=V(\xi,\eta)$ белгілейік, $\eta V_\eta + V = 0$ теңдеуіне келеміз.

ξ параметр ретінде қарастырып, теңдеудегі айнымалылар-ды бөліп және интегралдап табамыз:

$$\eta\frac{dV(\xi,\eta)}{d\eta}+V(\xi,\eta)=0, \quad \frac{dV(\xi,\eta)}{V(\xi,\eta)}+\frac{d\eta}{\eta}=0,$$

$$\ln V(\xi,\eta)+\ln\eta=\ln F(\xi), \quad V(\xi,\eta)=\frac{F(\xi)}{\eta},$$

мұндағы $F(\xi)$ – ξ айнымалысының кез келген функциясы.

Ауыстыруды ескере отырып, $u_\eta(\xi,\eta)=\frac{F(\xi)}{\eta}$ аламыз.

Алынған теңдеуді η бойынша интегралдап табамыз:

$$u(\xi,\eta)=F(\xi)\int\frac{d\eta}{\eta}+\Phi(\xi)=F(\xi)\cdot\ln\eta+\Phi(\xi),$$

мұндағы $\Phi(\xi)$ – ξ айнымалысының кез келген функциясы.

x және y ескі айнымалыларына қайтып оралып, теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$u(x,y)=F(xy)\cdot\ln x+\Phi(xy),$$

мұндағы F және Φ – екі рет үзіліссіз дифференциалданатын кез келген функциялар.

3. Толқындық теңдеу үшін Коши есебі

Коши есебінің мақсаты:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \tag{4.20}$$

теңдеудің

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{4.21}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін іздеу болып табылады.

(4.20) теңдеуінің жалпы шешімі мынадай болады:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at), \tag{4.22}$$

мұндағы f_1 және f_2 – екі рет үзіліссіз дифференциалданатын кез келген функциялар.

(4.20), (4.21) есебінің шешімі бар болады деп болжайық, онда ол (4.22) формуласымен беріледі. (4.21) бастапқы шарттарын қанағаттандыратындай f_1 және f_2 функцияларын анықтайық:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{4.23}$$

$$u_t(x,0) = -a \cdot f_1'(x) + a \cdot f_2'(x) = \psi(x). \tag{4.24}$$

Екінші теңдікті интегралдап, мынаны аламыз:

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$
$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)dy + C,$$

мұндағы C – кез келген тұрақты.

Алынған жүйеден $f_1(x)$ және $f_2(x)$ табамыз:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)dy - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(y)dy+\frac{C}{2}\cdot$$

(4.22)-ге f_1 және f_2 табылған мағыналарын қойып, мынаны аламыз:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\psi(y)dy-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(y)dy\right)$$

немесе интегралдарды біріктіріп

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy\cdot \qquad (4.25)$$

(4.25) – *Даламбер формуласы*.

Егер $\psi(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $\varphi(x)$ екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болса, онда (4.25) Даламбер формуласы (4.20), (4.21) Коши есебінің шешімі болатындығын тексеру қиын емес.

Біртекті емес толқындық теңдеу үшін Коши есебі:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0, \qquad (4.26)$$

теңдеудің

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad -\infty<x<\infty \qquad (4.27)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

$w_f(x,t;\tau)$ функциясы келесі көмекші Коши есебінің

$$\left(w_f\right)_{tt} = a^2\left(w_f\right)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau, \tag{4.28}$$

$$w_f(x,\tau;\tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\tau;\tau) = f(x,\tau),$$

$$t = \tau, \; -\infty < x < \infty \tag{4.29}$$

шешімі болсын.

(4.25) Даламбер формуласы бойынша

$$w_f(x,t;\tau) = w_f(x,t-\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \cdot \tag{4.30}$$

(4.25) Даламбер формуласын мынадай түрде жазамыз:

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) + w_\psi(x,t;0), \tag{4.31}$$

мұндағы $w_\psi(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$, $w_\varphi(x,t;0) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi$

функциялары

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2},$$

сәйкесінше $\tau = 0$ және $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ болғандағы (4.28), (4.29) есебінің шешімдері болып табылады.

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ нөлдік бастапқы шарттарымен, (4.26) біртекті емес теңдеуінің шешімі мына түрге ие болады:

$$u(x,t) = a^2\int_0^t w_f(x,t;\tau)d\tau \cdot \tag{4.32}$$

Шынымен, (4.32) функциясын дифференциалдап және $w_f(x,t;\tau)$ функциясы үшін (4.29) шарттарын ескере отырып табамыз:

$$u_t(x,t) = a^2 w_f(x,t;t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau, \quad (4.33)$$

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau =$$

$$= a^2 f(x,t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t) = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x,t;\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau.$$

Осыдан (4.32) функциясы (4.26) теңдеуін қанағаттандыратындығы көрінеді. (4.32) және (4.33) формулаларынан (4.26), (4.27) есебінің шешімін, (4.31) және (4.32) формулаларын ескере отырып, мынандай түрде көрсетуге болады:

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) + w_\psi(x,t;0) + a^2 \int_0^t w_f(x,t;\tau)d\tau. \quad (4.34)$$

w_f функциясы үшін (4.30) өрнегін қолдана отырып, мынаны аламыз:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{a}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \quad (4.35)$$

Егер $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ және $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ туындылары бар болса, онда (4.35) -ті (4.26), (4.27)-ге тікелей қою, (4.35) функциясы (4.26), (4.27) есебінің шешімі екендігін көрсетеді.

2-мысал. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, $u(x,0) = 3x^2$, $u_y(x,0) = 0$ *Коши есебін шығару керек.*

Шешуі. Теңдеу гиперболалық типті болады және $\xi = y - x$, $\eta = y + 3x$ айнымалыларында $u_{\xi\eta} = 0$ канондық түрге келтіріледі.

Оның жалпы шешімі $u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ болады, мұндағы f, g – кез келген функциялар.

x және y айнымалыларына оралып $u(x, y) = f(y - x) + g(y + 3x)$ аламыз.

f және g кез келген функцияларын анықтау үшін бастапқы шарттарды қолдану қажет:

$$u\big|_{y=0} = f(-x) + g(3x) = 3x^2, \tag{4.36}$$

$$u_y\big|_{y=0} = f'(-x) + g'(3x) = 0. \tag{4.37}$$

(4.36) шартын x бойынша дифференциалдап,

$$-f'(-x) + 3g'(3x) = 6x \tag{4.38}$$

аламыз.

(4.37), (4.38) теңдеулер жүйесінен:

$$f'(-x) + g'(3x) = 0,$$
$$-f'(-x) + 3g'(3x) = 6x,$$

$g'(3x) = \dfrac{3}{2}x$ немесе $g'(t) = \dfrac{t}{2}$, ақырғы теңдікті интегралдап, $g(t) = \dfrac{1}{4}t^2 + C$ немесе $g(3x) = \dfrac{9}{4}x^2 + C$ аламыз.

(4.36) теңдеуінен $f(-x)=3x^2-\frac{9}{4}x^2-C=\frac{3}{4}x^2-C$ табайық.

$f(-x)=\frac{3}{4}x^2-C=\frac{3}{4}(-x)^2-C$ функциясында $y-x$ айнымалысына көшіп, $f(y-x)=\frac{3}{4}(y-x)^2-C$, ал $g(t)$ функциясында $y+3x$ айнымалысына көшіп $g(y+3x)=\frac{1}{4}(y+3x)^2+C$ аламыз.

$f(y-x)$ және $g(y+3x)$ табылған мағыналарын жалпы шешіміне қойып, Коши есебінің ізделінген шешімін табамыз:

$$u(x,y)=\frac{3}{4}(y-x)^2+\frac{1}{4}(y+3x)^2=y^2+3x^2\cdot$$

Тікелей тексеру арқылы ізделінген функцияның дұрыс есептелгенін көрсетуге болады.

3-мысал. *Коши есебінің*

$$3u_{xx}-5u_{xy}+2u_{yy}=0$$

теңдеуі үшін

$$u(x,y)\big|_{y=x}=\frac{x}{1+x^2}, \qquad u_y(x,y)\big|_{y=x}=\sin x$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешуі. Теңдеудің жалпы шешімін табу үшін оны канондық түрге келтіреміз. $3dy^2+5dxdy+2dx^2=0$ сипаттауыш теңдеуі екі теңдеуге бөлінеді: $3dy+2dx=0$, $dy+dx=0$, олар үшін $3y+2x=C_1$, $y+x=C_2$ жалпы интегралдары болып табылады. Демек, теңдеуде $\xi=2x+3y$, $\eta=x+y$ айнымалыларын ауыстыру керек. Сонда теңдеу $u_{\xi\eta}=0$ канондық түріне келтііледі. Бұл теңдеуді интегралдап, $u(\xi,\eta)= f(\xi)+g(\eta)$ немесе x және y айнымалыларында

$$u(x,y)= f(2x+3y)+g(x+y) \tag{4.39}$$

табамыз.

Кез келген f және g функцияларын табу үшін бастапқы шарттарын қолданамыз:

$$u(x,y)\Big|_{y=x} = f(5x)+g(2x)=\frac{x}{1+x^2}, \tag{4.40}$$

$$u_y(x,y)\Big|_{y=x} =3f'(5x)+g'(2x)=\sin x\cdot \tag{4.41}$$

(4.40) шартын дифференциалдап,

$$5f'(5x)+2g'(2x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$
$$3f'(5x)+g'(2x)=\sin x$$

теңдеулер жүйесін аламыз.

Бұл жүйеден $f'(5x)=2\sin x-\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ немесе $5x=t$ деп қойсақ, $f'(t)=2\sin\frac{t}{5}-\frac{25\cdot\left(25-t^2\right)}{\left(25+t^2\right)^2}$ аламыз. Соңғы теңдікті интегралдап, $f(t)=-10\cos\frac{t}{5}-\frac{25t}{25+t^2}+C$ табамыз.

$f(5x)=-10\cos x-\frac{5x}{1+x^2}+C$ болғандықтан, (4.40) теңдеуінен $g(2x)=10\cos x+\frac{6x}{1+x^2}-C$ немесе $g(x)=10\cos\frac{x}{2}+\frac{12x}{4+x^2}-C$ аламыз.

Онда $f(2x+3y) = -10\cos\frac{2x+3y}{5} - \frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2} + C$,

$$g(x+y) = 10\cos\frac{x+y}{2} + \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} - C\cdot$$

Демек, Коши есебінің шешімі болып

$$u(x,y) = 10\cos\frac{x+y}{2} - 10\cos\frac{2x+3y}{5} + \frac{12(x+y)}{4+(x+y)^2} - \frac{25(2x+3y)}{25+(2x+3y)^2}\cdot$$

функциясы табылады.

Бақылау сұрақтары:

1. Керілген ішектің кіші көлденең тербелісін қандай теңдеу анықтайды?
2. Ішек тербелісінің теңдеуі үшін шекаралық және бастапқы шарттар қалай қойылады?
3. Даламбер формуласын жазыңыздар.

Жаттығулар

1. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$ теңдеуді сипаттауыштар әдісімен шығарыңыздар.

Жауабы: $u(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\cdot f(xy) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, мұндағы f және g – кез келген функциялар.

2. $u_{xx} - 2\sin x\cdot u_{xy} - \cos^2 x\cdot u_{yy} - \cos x\cdot u_y = 0$ теңдеуді сипаттауыштар әдісімен шығарыңыздар.

Жауабы: $u(x,y) = f(x+y-\cos x) + g(x-y+\cos x)$, мұндағы f және g – кез келген функциялар.

3. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Жауабы: $u(x,y)=\dfrac{f(x)+g(y)}{x-y}$, мұндағы f және g – кез келген функциялар.

4. $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^x$ теңдеудің жалпы шешімін табу керек.

Жауабы: $u(x,y)=2e^x+e^{\frac{x+2y}{2}}f(x)+g(x+2y)$, мұндағы f және g – кез келген функциялар.

5. Келесі Коши есептерін шығарыңыздар:

1) $e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=0,\ u\big|_{y=0}=-\dfrac{x^2}{2},\quad u_y\big|_{y=0}=-\sin x$;

2) $u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0,$
$u\big|_{y=\sin x}=\cos x,\quad u_y\big|_{y=\sin x}=\sin x$;

3) $e^y u_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y},\ u\big|_{y=0}=\sin x,\quad u_y\big|_{y=0}=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

Жауабы: 1) $u(x,y)=-\dfrac{x^2}{2}+\cos(x-1+e^y)-\cos x$;

2) $u(x,y)=\cos(y-x-\sin x)$;

3) $u(x,y)=\dfrac{x^2}{2}(e^y-1)+$
$\sin x+\dfrac{x^3-(x-e^y-1)^3}{6}+arctg(x+e^y-1)-arctgx\cdot$

Параболалық типті теңдеулер

Жылуөткізгіштік, диффузия, өткізілетін ортадағы электромагниттік өрістерді тарату, тұтқыр сұйықтықтың қозғалысында, жер астындағы сулардың қозғалысында және тағы басқалар сияқты физикалық құбылыстарды зерттегенде параболалық типті теңдеулер алынады.

1. Жылудың таралуы туралы есеп

l ұзындығымен жіңішке біртекті стерженді қарастырамыз, оның бүйір бет жағы жылудан қорғалған. X өсін стерженнің бойымен бағыттайық, $x = 0$ стерженнің сол жақ соңы, ал $x = l$ оң жақ соңы болсын.

Фурье заңы бойынша, Δt уақытында стерженнің S ауданымен X қимасы арқылы өтетін жылудың саны мына формуламен анықталады:

$$\Delta Q = -k \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t, \tag{5.1}$$

мұндағы k – материалға байланысты стерженнің жылуөткізгіштік коэффициенті, $u(x,t)$ – t уақытындағы стерженнің X қимасындағы температурасы.

Δu-ға температураны көбейту үшін біртекті денеге қажет болатын жылудың саны мынаған тең болады:

$$Q = cm \cdot \Delta u = c\rho V \cdot \Delta u, \tag{5.2}$$

мұндағы c – меншікті жылу сыйымдылық, m – дененің массасы, ρ – оның тығыздығы, V – көлемі.

Егер температураның өзгеруі стерженнің әртүрлі бөліктерінде әртүрлі шамаға ие болса немесе егер стержен біртекті емес болса, онда:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \cdot \Delta u \, dx \cdot \tag{5.3}$$

Стерженнің ішінде жылу пайда болуы да немесе жұтылуы да мүмкін. $F(x,t)$ – t уақыты бойынша x нүктесіндегі жылу көздерінің тығыздығы болсын. Δt уақыты аралығындағы стерженнің $[x_1, x_2]$ бөлігінде осы көздердің әрекеттерінің нәтижесінде

$$Q = S \cdot \Delta t \int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx \tag{5.4}$$

жылудың мөлшері бөлінеді. Δt уақыты аралығында $[x_1, x_2]$ кейбір кесіндідегі жылу балансын есептеуде жылуөткізгіштік теңдеуі алынады. Энергияны сақтау заңын және (5.1), (5.3), (5.4) формулаларын қолданып, мына теңдікке ие боламыз:

$$k \cdot S \cdot \Delta t \left[\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] + S \cdot \Delta t \int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \cdot \Delta u \, dx \,. \tag{5.5}$$

$u(x,t)$ функциясының u_{xx} және u_t үзіліссіз туындылары бар деп болжайық. Орта туралы теореманы пайдаланып,

$$k \cdot \left[\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] \cdot \Delta t + F(\xi_1, t)\Delta x \Delta t = c\rho \cdot \Delta u(\xi_2, t) \cdot \Delta x \tag{5.6}$$

аламыз, мұндағы $x_1 < \xi_1 < x_2, \quad x_1 < \xi_2 < x_2$.

Ақырлы өсімше туралы теореманың көмегімен (5.6) теңдігін мына түрге түрлендіруге болады:

$$k \cdot \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial x^2} \cdot \Delta x \Delta t + F(\xi_1, t)\Delta x \Delta t = c\rho \cdot \frac{\partial u(\xi_2, \tau)}{\partial t} \cdot \Delta x \Delta t \tag{5.7}$$

мұндағы $x_1 < \xi < x_2$, τ – $(t, t+\Delta t)$ интервалының аралық нүктесі. Осыдан $\Delta x \Delta t$-ға қысқартудан кейін табамыз:

$$k \cdot \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial x^2} + F(\xi_1, t) = c\rho \cdot \frac{\partial u(\xi_2, \tau)}{\partial t} \,. \tag{5.8}$$

$[x_1, x_2]$ және Δt кез келген болуына байланысты *жылуөткізгіштік теңдеуі* деп аталатын

$$k\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)=c\rho\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad (5.9)$$

теңдеуді аламыз.

Егер стержен біртекті болса, онда $k,\ c,\ \rho$ тұрақтылар деп санауға болады және теңдеу мына түрде жазылады:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), \qquad (5.10)$$

мұндағы $a^2=\dfrac{k}{c\rho},\quad f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho},\quad a^2$ – температура өткізгіштік коэффициенті деп аталатын тұрақты. Егер көздер жоқ болса, яғни $F(x,t)=0$, онда жылуөткізгіштік теңдеуі мына түрге ие болады:

$$u_t=a^2u_{xx}. \qquad (5.11)$$

Жылудың таралуын бірмәнді сипаттау үшін (10) теңдеуінен басқа бастапқы температураны, яғни

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (5.12)$$

және шекарадағы температураның режимін де беру қажет.

$x=0$ стерженнің соңында берілген температура сақталған жағдайда шекаралық шарт мына түрге ие болады:

$$u(0,t)=\mu(t). \qquad (5.13)$$

Егер $Q(l,t)$ жылу ағынының стерженнің түпбеттік қимасы арқылы өтетін шамасы берілсе, онда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\nu(t) \qquad (5.14)$$

шекаралық шартқа келеміз, мұндағы $\nu(t)$ – $Q(l,t)$ ағыны арқылы $\nu(t) = -\dfrac{Q(l,t)}{k}$ формуласы бойынша көрсететін функция. $x=0$ және $x=l$-дегі шекаралық шарттар әртүрлі типті болуы мүмкін.

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есеп

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ \ 0<x<l,\ \ 0<t\le T$$

теңдеуін

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l,$$
$$u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),\ \ 0\le t\le T$$

шарттарын қанағаттандыратын $u=u(x,t)$ шешімін табу болып саналады, мұндағы $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ және $\mu_2(t)$ – берілген функциялар.

Жартылай шексіз стерженнің *жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шеттік есебі* келесі түрде қойылады: $0<x<\infty$ және $t\ge 0$ аймағындағы

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0<x<\infty$$
$$u(0,t)=\mu(t),\ \ t\ge 0$$

шарттарын қанағаттандыратын жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін табу керек, мұндағы $\varphi(x)$ және $\mu(t)$ – берілген функциялар.

2. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін классикалық Коши есебі деп $C^2(t>0)\cap C(t\ge 0)$ класындағы, $x\in R^n$, $t>0$ болғандағы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{5.15}$$

теңдеуін және

$$u\big|_{t=+0} = \varphi(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad n \ge 1 \tag{5.16}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $u(x,t)$ функциясын табу туралы есепті айтамыз, мұндағы f және φ – берілген функциялар.

(5.15), (5.16) Коши есебінің шешімі *Пуассон формуласымен* беріледі:

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau, \tag{5.17}$$

мұндағы $|x-\xi|^2 = (x_1-\xi_1)^2 + \ldots + (x_n-\xi_n)^2, \quad n \ge 1.$

1-мысал. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + e^t$, $u\big|_{t=0} = 2$,

Коши есебін шығару керек.

Шешуі. Коши есебінің шешімі (5.17) Пуассон формуласымен беріледі. $n=1$ болғанда (5.17) формуласын мына түрде жазуға болады:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \cdot \qquad (5.18)$$

(5.18) формуласын пайдаланып, алғашқы есептің шешімін табамыз:

$$u(x,t) = \frac{2}{2\cdot 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot 2^2 t}} d\xi + \frac{1}{2\cdot 2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau + e^{\tau}}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot 2^2(t-\tau)}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}} d\xi + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau + e^{\tau}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot 4\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau + e^{\tau}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot 4\sqrt{t-\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 2 + \int_0^t (\tau + e^{\tau}) d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t \cdot$$

2-мысал. Есептің берілгендерін сәйкес түрде x өсіне жалғастырып,

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

есепті шығару керек.

Шешуі. $\varphi(x)$ функциясының жұп жалғастыруы болып табылатын $\Phi(x)$ функциясын енгіземіз.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

және

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$
$$U(x,0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

көмекші есепті қарастырамыз.

Бұл есептің шешімі Пуассон формуласымен анықталады:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi\cdot \qquad (5.19)$$

Интеграл ішіндегі өрнек тақ функция, ал интегралдау шектері координаталар басына қарағанда симметриялы болғандықтан, (5.19) формуласымен анықталған $U(x,t)$ функциясы:

$$U_x(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\cdot\frac{\xi}{2a^2t}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}d\xi=0$$

шекаралық шартты да қанағаттандырады.

$x\geq 0$ аймағындағы $U(x,t)$ функциясының мағынасын қарастырып және $\Phi(x)$ функциясының анықтамасын қолданып, мынаны аламыз:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi\cdot$$

Демек, $x\geq 0$, $U(x,t)=u(x,t)$ болғандықтан, есептің шешімін аламыз:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi\cdot$$

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай дифференциалдық теңдеу стержендегі температураның үлестірімін сипаттайды?
2. Стержен үшін жылуөткізгіштік теңдеуі қандай түрде болады? Шекаралық және бастапқы шарттар қалай қойылады?
3. Қандай функция жылуөткізгіштік теңдеуінің фундаментальды шешімі деп аталады?

Жаттығулар

1. Пуассон формуласын пайдаланып, жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебінің шешімін табу керек:

$$u_t = 16u_{xx} \quad x \in R^1, \quad t > 0, \; u\Big|_{t=0} = e^{-4x^2-2x}.$$

Жауабы: $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+256t}} e^{\frac{64t-4x^2-2x}{1+256t}}$.

2. x өсіне есептің берілгендерін сәйкес түрде жалғастырып, есепті шығару керек

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Жауабы: $u(x,t) = \dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}]\varphi(\xi)d\xi \cdot$

Нұсқау. $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$ формуласы бойынша ізделінетін функцияның ауыстыруын жасау керек.

Эллиптикалық типті теңдеулер

1. Лаплас және Пуассон теңдеулері

Эллиптикалық типті теңдеулер қатары әртүрлі физикалық табиғаты бар орнықтыланған (стационарлық) процестерді зерттеуге алып келеді. Оған стационарлық электрлік және магниттік өрістер (электростатика, магнитостатика, тұрақты электр қуатының өрістері) жатады:

$$\Delta u = 0. \tag{6.1}$$

Лаплас теңдеуі эллиптикалық типті теңдеудің қарапайым түрі болып табылады, мұндағы $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – Лаплас операторы.

Жылу көздері бар болғанда Пуассон теңдеуін аламыз

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \tag{6.2}$$

мұндағы F – жылу көздерінің тығыздығы, ал k – жылуөткізгіштік коэффициенті.

Егер *u* функциясы *D* аймағында өзінің екінші ретке дейінгі барлық туындыларымен бірге үзіліссіз болса және Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, онда функциясы *D* аймағында *гармониялық* деп аталады.

$z = x + iy$ комплекстік айнымалы

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитикалық функциясының нақты және жорамал бөліктері гармониялық функциялар болып табылады. Функцияның аналитикалықтығының қажетті және жеткілікті шарттары болып *Коши-Риман шарттары* саналады:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{6.3}$$

Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін шеттік есеп шекаралық шарттардың типіне тәуелді, егер $u\big|_S = f$ болса, бірінші шеттік есеп (*Дирихле есебі*), егер $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f$ болса, екінші шеттік есеп (*Нейман есебі*), мұндағы f – аймақтың S шекарасында берілген кейбір функция, $n - S$ -ке сыртқы нормаль.

Нейман есебі шешімінің қажетті және жеткілікті шарты:

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{6.4}$$

Егер Нейман есебінің шешімі (6.4) шартын қанағаттандырса, онда Нейман есебі *дұрыс қойылған*.

Қарапайым аймақтар жағдайындағы шеттік есептердің шешімін айнымалыларды ажырату әдісімен алуға болады (Фурье әдісі). Шешімді Грин функциясының көмегімен де алуға болады.

2. Грин функциясының көмегімен шеттік есептерді шығару

$D \in R^3$ аймағы үшін (ішкі) Дирихле есебінің *Грин функциясы* деп келесі шарттарды қанағаттандыратын $M(x, y, z)$ белгіленген нүктедегі $P(\xi, \eta, \zeta)$ нүктесінің $G(M, P)$ функциясы аталады:

1) $G(M, P)$ функциясы аймақтың барлық $P \neq M$ нүктелерінде

$$\Delta G \equiv G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0$$

Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

2) $G(M, P)$ мына түрге келтіріледі:

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi R_{MP}} + \upsilon,$$

мұндағы $\upsilon = \upsilon(M,P)$ – D аймағында әр жерде гармониялық функция. $G(M,P)$ функциясы $M = P$ аргументтері сәйкес келгенде ∞ айналады.

3) $G(M,P)$ функциясы шекарада нөлге айналады:

$$G(M,P) = 0, \text{ егер } P \in S.$$

Егер $\upsilon\big|_S = -\dfrac{1}{4\pi R}$ болсын деп талап етсек, бұл шарт орындалады.

Грин функциясы Лаплас теңдеуі үшін $\Delta u = 0$, $u\big|_S = f$, бірінші шеттік есептің шешіміне айқындалған көрініс беруге мүмкіндік береді:

$$u(M_0) = -\iint_S f(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}dS \cdot$$

G функциясы $\Delta\upsilon = 0$, $\upsilon\big|_S = -\dfrac{1}{4\pi R}$ бірінші шеттік есептің шешімі болып табылатын υ функциясының көмегімен анықталады.

$G(M,P)$ функциясы D аймағының ішінде барлық жерінде оң, өзінің аргументтеріне қатысты симметриялы, яғни $G(M,P) = G(P,M)$ болады.

$D \in R^2$ аймағы үшін Дирихле есебінің *Грин функциясы* келесі шарттарды қанағаттандыратын:

1) $M = M_0$ нүктесінен басқа қарастырылатын D аймағының барлық жерінде $\Delta G = 0$.

2) $M = M_0$ нүктесінде G функциясының келесі түрдегідей өзгешелігі болады:

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}},$$

3) $G\big|_C = 0$, мұндағы C – D аймағының шекарасы, $G(M, M_0)$ функциясын айтады.

Бұл жағдайда Грин функциясы мына түрге ие болады:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + \upsilon(M, M_0),$$

мұндағы υ – шекарада $\upsilon\big|_C = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}$ шартын қанағаттандыратын барлық жерде үзіліссіз гармониялық функция.

Лаплас теңдеуі үшін $\Delta u = 0$, $u\big|_C = f$ бірінші шеттік есептің шешімі мына формуламен беріледі:

$$u(M_0) = -\int_C f\frac{\partial G}{\partial n}ds.$$

1-мысал. Грин функциясының көмегімен шар үшін ішкі Дирихле есебін шешу.

Шардың ішінде гармониялық, тұйық шарда үзіліссіз және осы шардың S бетінде $f(P)$ берілген үзіліссіз мағынасын қабылдайтын $u(M)$ функциясын табу керек болсын.

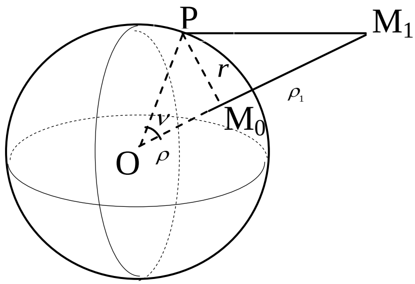
Алдымен, шар үшін Грин функциясын құрайық:
$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \upsilon(M, M_0)$, $r = |MM_0|$, $\upsilon(M, M_0)$ – сфераның ішінде гармониялық функция, $\upsilon(M, M_0)\big|_S = -\frac{1}{4\pi r}$. Қорыта келгенде, $\upsilon(M, M_0)$ функциясы Дирихле есебінің

$$\Delta\upsilon(M, M_0) = 0, \quad \upsilon(M, M_0)\big|_S = -\frac{1}{4\pi r}$$

шешімі ретінде анықталады.

Ішкі Дирихле есебінің шешімі келесі формуламен беріледі:

$$u(M_0) = -\iint_S f(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}dS, \quad u(M)\big|_S = f(M).$$



4-сурет

R радиуспен шардың ішінен $M_0(x, y, z)$ кез келген нүктесін аламыз және шардың O центрінен осы нүктеге дейінгі қашықтықты ρ арқылы белгілейік (4-сурет). M_0 нүктесінен өтетін радиусте $\rho\rho_1 = R^2$ болатындай етіп OM_1 кесіндісін алайық. Сферада кез келген $P(\xi, \eta, \zeta)$ нүктесін алайық және осы нүктеден M_0 және M_1 нүктелеріне дейінгі қашықтықты сәйкесінше r және r_1 арқылы белгілейік. O төбесінің ортақ бұрыштары және осы бұрышты жасайтын пропорционал қабырғалары бойынша, $OM_0 \cdot OM_1 = R^2$ немесе $\frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1}$ шартының күшімен OM_1P және OM_0P үшбұрыштары ұқсас. Үшбұрыштардың ұқсастығынан $\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1}$ шығады. Осыдан барып мынаны $\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}$ ($P \in S$ барлық нүктелері үшін) аламыз. Сондықтан сферада $\upsilon = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}$ гармониялық функциясы $-\frac{1}{4\pi r}$ функциясы сияқты мағынаны қабылдайды.

M_0 нүктесінде $\frac{1}{4\pi r}$ өзгешелігі бар (яғни шексіздікке айналады) және сферада нөлге айналатын, $G(M, M_0) = g(M)$ функциясы шардың ішіндегі гармониялық функция болғандықтан, $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)$ функциясы ізделінген Грин функциясы болып табылады (M сферада жатпайды).

Демек,

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)dS \cdot \qquad (6.5)$$

Туындысын есептейік

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{R}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right),$$

мұндағы n – сыртқы нормаль, $r_1 = |M_1 M|$.

n бағыты бойынша $\frac{1}{r}$ және $\frac{1}{r_1}$ -ден туындылары мынаған тең:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(r, n) = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\cos(r_1, n) = -\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1, n) \cdot$$

Сонымен,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{\cos(r,n)}{r^2}+\frac{R}{\rho}\frac{\cos(r_1,n)}{r_1^2}. \qquad (6.6)$$

OM_0P және OM_1P үшбұрыштарынан

$$\rho^2 = R^2+r^2-2Rr\cos(r,n)$$
$$\rho_1^2 = R^2+r_1^2-2Rr_1\cos(r_1,n)$$

аламыз.

Осыдан $\cos(r,n)$ және $\cos(r_1,n)$ анықтап, табамыз:

$$\cos(r,n)=\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}, \quad \cos(r_1,n)=\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1}.$$

Шардың O центрінен M_1 нүктесіне дейінгі арақашықтық: $\rho_1=\frac{R^2}{\rho}$, ал S сферасы нүктелерінің M_1нүктесіне дейінгі арақашықтық: $r_1=\frac{R}{\rho}r$, осы формулаларды қолданып, мынаны аламыз:

$$\cos(r_1,n)\Big|_S=\frac{R^2+\frac{R^2}{\rho^2}r^2-\frac{R^4}{\rho^2}}{2\frac{R^2}{\rho}r}=\frac{\rho^2+r^2-R^2}{2\rho r}.$$

(6.6)-ға $\cos(r,n)$ және $\cos(r_1,n)$ үшін алынған формулаларды қойып, келесі туындыны аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{\rho^2-R^2+r^2}{2Rr^3}=\frac{\rho^2-R^2}{Rr^3}.$$

(6.5) формуласының күшімен $u(M_0)$ функциясы мынаған тең:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S f(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS. \qquad (6.7)$$

(6.7) формуласы *Пуассон формуласы* деп аталады.

$u(M_0)$ функциясының гармониялығы $M_0 \neq P$ $(\rho < R)$

$$\Delta\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\Delta\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}-\Delta\frac{1}{r}=-2R\Delta\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}=-2R\Delta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$=-2R\frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta\frac{1}{r}\right)=0$, $P\in S$ болғандықтан шығады.

Енді $M_0 \to N$ болғандағы $u(M_0)\to f(N)$, $N\in S$ дәлелдейік. Бірақ та бұл үшін мынаны ескереміз, $f(P)\equiv 1$ болса, онда $u(M_0)\equiv 1$ (жалғыздық). Сондықтан

$$1=\frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS. \qquad (6.8)$$

(6.8) теңдігінің екі жағын да $f(N)$-ге көбейтіп және содан кейін Пуассон формуласынан шегеріп, мынаны аламыз:

$$u(M_0)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S [f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS. \qquad (6.9)$$

N нүктесін сонша аз 2δ радиусы бар шармен қоршайық, осы шардың ішіне түсетін S-тің барлық нүктелерінде $f(P)$ үзіліссіздігінен мына теңсіздік орын алады:

$$\left| f(P) - f(N) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0. \tag{6.10}$$

Центрі N нүктесінде радиусы 2δ шардың ішіндегі S беті-нің бір бөлігін σ арқылы, ал қалған бөлігін $S-\sigma$ арқылы бел-гілейміз. Сонда

$$u(M_0) - f(N) = \frac{1}{4\pi R}\left\{ \iint_{\sigma} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS + \right.$$
$$\left. + \iint_{S-\sigma} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right\},$$

және де (6.10) күшімен

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\pi R} \iint_{S} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Екінші интегралдың бағалауы үшін центрі N нүктесінде радиусы δ болатын жаңа шарды құрамыз. Егер $P \in S - \sigma$, M_0 осы шардың ішінде болып қалса, $r = \left| M_0 P \right| > \delta$. S бетінде $\left| f(P) \right| < K$ болғандықтан,

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S-\sigma} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| \le \frac{2KR(R^2 - \rho^2)}{\delta^3}.$$

$M_0 \to N$, онда айырымы $R^2 - \rho^2 \to 0$, демек,

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S-\sigma} [f(P) - f(N)] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Осыдан $\left|u(M_0) - f(N)\right| < \varepsilon$, бұл

$$\lim_{M \to N} u(M_0) = f(N)$$

теңсіздігіне пара-пар.

Бақылау сұрақтары:

1. Лаплас теңдеуін полярлық координаталар жүйесінде жазыңыздар.
2. Жазықтықтағы, кеңістіктегі Лаплас теңдеуінің фундаментальды шешімінің анықтамасын беріңіздер.
3. Қандай функция гармониялық деп аталады?
4. Пуассон формуласын қорыту.
5. Қандай функция Дирихле есебінің Грин функциясы деп аталады?

Жаттығулар

1. Радиусы R дөңгелектегі Лаплас теңдеуі үшін $\Delta u = 0$, $u\big|_C = f$ ішкі шеттік Дирихле есебін

$$u(P) = -\int_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

формуласы бойынша шығарыңыздар.

Нұсқау. Шешімді Грин функциясының көмегімен алуға болады:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \upsilon_1,$$

мұндағы $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, υ_1 – C аймағының шекарасында $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ функциясымен сәйкес келетін және бірінші ретті және екінші ретті шенелген туындылары бар, қарастырып отырған аймақтағы гармониялық функция.

Жауабы: $u(P)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)}d\theta$,

мұндағы ρ, ψ – P нүктесінің полярлық координаталары, ал R, θ – C шекарада M нүктесінің полярлық координаталары.

2. Төменде жазылған функциялар гармониялық болып табылатын k тұрақтысының мәнін табыңыздар:

1) $x_1^3+kx_1x_2^2$;

2) $x_1^2+x_2^2+kx_3^2$;

3) $e^{2x_1}chkx_2$;

4) $\sin 3x_1 ch\, kx_2$;

5) $\dfrac{1}{|x|^k}$, $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$.

Жауабы: 1) $k=-3$; 2) $k=-2$; 3) $k=\pm 2i$, сонымен қатар $chkx_2=\cos 2x_2$; 4) $k=\pm 3$; 5) $n>2$, $x\neq 0$ болғанда $k=0$, $k=n-2$.

3. $u=u(x_1,\dots,x_n)$ функциясы гармониялық болсын. Келесі функциялардың гармониялығын анықтаңыздар:

1) $u(x+h)$, мұндағы $h=(h_1,\dots,h_n)$ – тұрақты вектор;

2) $u(lx)$, мұндағы l – скалярлық тұрақты;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $n=2$;

4) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $n>2$;

5) $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3}$, $n=3$;

6) $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $n=2$;

7) $x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$, $n=2$.

Жауабы: 1) гармониялық; 2) гармониялық; 3) гармониялық; 4) жоқ; 5) гармониялық; 6) жоқ; 7) гармониялық.

4. Егер $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y-y^3$ болса, u гармониялық функциясын табыңыздар.

Жауабы: $u(x,y)=x^3y-xy^3+cy+c_0$, мұндағы c, c_0 – кез келген нақты тұрақтылар.

5. Егер $\frac{\partial u}{\partial x}=xy+x^2-y^2$ болса, онда u гармониялық функциясын табыңыздар.

Жауабы: $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y-xy^2+\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{6}+cy+c_0$.

6. Бірлік дөңгелектің ішінде гармониялық болатын, функцияны табу керек:

1) $u\big|_{r=1}=\cos^2\varphi$;

2) $u\big|_{r=1}=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi$.

Жауабы: 1) $\frac{1}{2}(1+r^2\cos 2\varphi)$; 2) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}r^4\cos 4\varphi$. Максимум принципінің орындалуын тексеріңіздер.

7. $x^2+y^2=r^2<R^2$ дөңгелекте $\Delta u(x,y)=x$, $0\le r<R$, $u(x,y)\big|_{r=R}=2(x^2+y)$ Дирихле есебін шығару керек.

Жауабы: $u(x,y)=x^2-y^2+2y+R^2$.

Нұсқау. Поляр координаталардағы шекаралық функция:

$$2(x^2+y)=2R^2\cos^2\varphi+2R\sin\varphi=R^2(1+\cos 2\varphi)+2R\sin\varphi.$$

Онда шеттік шарт мына түрге келеді:

$$\sum_{k=0}^{\infty}R^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=R^2+R^2\cos 2\varphi+2R\sin\varphi.$$

Осы теңдіктің екі жағында да $\cos k\varphi$ және $\sin k\varphi$ болғандағы коэффициенттерді салыстырып, мынаны аламыз:

$$a_0 = R^2,\ a_2 = 1,\ b_1 = 2,\ a_1 = a_3 = \ldots = 0,\ b_0 = b_2 = \ldots = 0 \cdot$$

Демек,
$u(x,y) = R^2 + r^2\cos 2\varphi + 2r\sin\varphi = R^2 + r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2r\sin\varphi =$
$= R^2 + x^2 - y^2 + 2y \cdot$

8. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ дөңгелекте

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad 0 \le r < R, \quad u(x,y)\big|_{r=R} = x + xy$$

Дирихле есебін шығару керек.

Жауабы: $x + xy$.

9. Бірлік дөңгелек үшін Дирихле есебін шығару керек, егер оның шекарасында келесі функциялар берілген болса,

1) $f(\varphi) = \sin^3\varphi$; 2) $f(\varphi) = \cos^4\varphi$.

Жауабы: 1) $\dfrac{r}{4}(3\sin\varphi - r^2\sin 3\varphi)$; 2) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{r^4}{8}\cos^4\varphi \cdot$

Максимум принципінің орындалуын тексеріңіздер.

10. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ дөңгелегінде $\Delta u(x,y) = 1$, $0 \le r < R$, $u(x,y)\big|_{r=R} = 0$ Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін шешіңіздер.

Жауабы: $u = \dfrac{1}{4}(r^2 - R^2) \cdot$

Нұсқау. Теңдеудің дербес шешімін таңдап алып, берілген есепті Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебіне келтіру керек.

11. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ дөңгелегінде $\Delta u = x$, $0 \le r < R$, $u(x,y)\big|_{r=R} = 0$ Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін шығарыңыздар.

Жауабы: $u(x,y) = \dfrac{1}{8}(x^3 + x^2 y - R^2 x)$.

Айнымалыларды ажырату әдісі (Фурье әдісі)

1. Гиперболалық типті теңдеулер

Соңы бекітілген ішектің тербелісі туралы есепті қарастырамыз. Бұл есеп

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{7.1}$$

теңдеудің,

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{7.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{7.3}$$

бастапқы және шекаралық шарттарды қанағаттандыратын, шешімін іздейтін есепке келтіріледі.

(7.1) теңдеуінің тепе-тең нөлге тең емес, мына түрдегі

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{7.4}$$

дербес шешімін іздейміз.

(7.1) теңдеуіне (7.4)-ті қойып және айнымалыларды ажырату арқылы төмендегіні аламыз:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \tag{7.5}$$

мұндағы λ – кез келген тұрақты.

(7.5)-тен біз қарапайым дифференциалдық теңдеулерге келеміз:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{7.6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{7.7}$$

(7.3) шекаралық шарттары келесіге келеді:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Демек, (7.4) түріндегі тривиалды емес шешімін алу үшін $X(x)$ функциясы

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \tag{7.8}$$

шарттарын қанағаттандыруы тиісті.

(7.7), (7.8) *Штурм – Лиувилль* есебіне меншікті мәні бар есепке келейік: (7.7), (7.8) есебінің тривиалды емес шешімі бар болатын, λ параметрінің мәндерін, сонымен қатар осы шешімдерді табу керек.

λ параметрінің мұндай мәндері *меншікті мәндер,* ал оларға сәйкес келетін тривиалды емес шешімдер (7.7), (7.8) есебінің *меншікті функциялары* деп аталады.

1. $\lambda < 0$ болған жағдайда есептің тривиалды емес шешімдері болмайды. (7.7) теңдеуінің жалпы шешімі

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

түрінде болады.

Шекаралық шарттар мынаны береді:

$$X(0) = A + B = 0, \qquad X(l) = Ae^{l\sqrt{-\lambda}} + Be^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0,$$

яғни $A = -B$ және $A\left(e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$.

Бірақ қарастырып жатқан жағдайда $l\sqrt{-\lambda}$ саны – нақты және оң, сол себептен $e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}} \neq 0$. Сол үшін $A = 0$, $B = 0$, олай болса, $X(x) \equiv 0$.

2. $\lambda = 0$ болған жағдайда да есептің тривиалды емес шешімдері болмайды. (7.7) теңдеуінің жалпы шешімі бұл жағдайда мына түрге ие болады:

$$X(x) = Ax + B.$$

Шекаралық шарттар:

$$X(0) = B = 0, \quad X(l) = Al = 0,$$

яғни $A = 0$, $B = 0$, демек, $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda > 0$ жағдайында (7.7) теңдеуінің жалпы шешімі мына түрде жазылуы мүмкін:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Шекаралық шарттар:

$$X(0) = A = 0, \quad X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Егер $X(x)$ нөлге тепе-тең болмаса, онда $B \neq 0$, сондықтан

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \text{немесе} \quad \sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Демек, (7.7), (7.8) есебінің тривиалды емес шешімі

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots$$

мағыналарында ғана мүмкін болады.

Бұл меншікті мәндерге

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

меншікті функциялары сәйкес келеді.

$X_n(x)$ меншікті шешімдері толық базис құрайды, олар өзара ортогональды:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \frac{l}{2}\cdot\delta_{nm}\cdot$$

$\lambda = \lambda_n$ жағдайындағы (7.6) теңдеуінің жалпы шешімі

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{a\pi nt}{l} + B_n\sin\frac{a\pi nt}{l},$$

мұндағы A_n, B_n – кез келген функциялар.

(7.4)-ке $X_n(x)$ және $T_n(t)$ қойып, (7.3) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын (7.1) теңдеуінің

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l} + B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

дербес шешімдерін табамыз.

(7.1) теңдеуінің сызықтық және біртектілігінің күшімен есептің жалпы шешімі қатар түрінде жазылуы мүмкін:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l} + B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \quad (7.9)$$

Егер бұл қатар бірқалыпты жинақты және оны екі рет мүшелеп дифференциалдауға болса, онда қатардың қосындысы (7.1) теңдеуін және (7.3) шекаралық шарттарын қанағаттандырады.

A_n, B_n тұрақтыларын, (7.9) қатарының қосындысы $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ бастапқы шарттарын да қанағаттандыратындай етіп анықтаймыз. $t = 0$ болған жағдайда (7.9) шешімінің көрінісін пайдалана отырып,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}, \quad (7.10)$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}B_n\sin\frac{\pi nx}{l} \qquad (7.11)$$

теңдіктеріне келеміз.

(7.10), (7.11) формулалары $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларының $(0,l)$ интервалында синус бойынша Фурье қатарына жіктелуін береді. Бұл жіктелулердің коэффициенттері

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad B_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \qquad (7.12)$$

формулалары бойынша есептелінеді.

1-мысал. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0\le x\le l$, $u(0,t)=u(l,t)=0$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\sin\frac{2\pi x}{l}$ *есебін шығару керек.*

Шешуі. Айнымалыларды ажырату әдісін қолданып, яғни $u(x,t)$ функциясын (7.4) көбейтіндісі түрінде ұсынып, есептің жалпы шешімін (7.9) қатар түрінде аламыз:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

A_n, B_n тұрақтыларын анықтаймыз. $t=0$ болғандағы жалпы шешімнен және $u(x,0)=0$ бастапқы шартынан мынаны аламыз:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}=0,$$

демек, тұрақтылар $A_n=0$, $n=1,2,\dots$

Қатарды дифференциалдау арқылы келесі түрді аламыз:

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{a\pi nt}{l}+B_n\frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \quad (7.13)$$

(7.13)-тен $t=0$ болғанда және $u_t(x,0)=\sin\frac{2\pi x}{l}$ бастапқы шартынан

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}=\sin\frac{2\pi x}{l},$$

сонымен, $(0,l)$ интервалында синус бойынша Фурье қатарына берілген жіктеудің коэффицинеттері мынаған тең болады:

$$n\neq 2 \text{ болғанда } B_n=0, \quad B_2=\frac{l}{2a\pi}.$$

Табылған A_n, B_n коэффициенттерінің мәндерін жалпы шешімге қойып,

$$u(x,t)=B_2\sin\frac{2a\pi t}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}=\frac{l}{2a\pi}\sin\frac{2a\pi t}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}$$

дербес шешімін табамыз.

2-мысал. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0\le x\le l$ $u(0,t)=u_x(l,t)=0$, $u(x,0)=\sin\frac{5\pi x}{2l}$, $u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2l}$ *есебін шығару керек.*

Бұл есепті $u_t(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2l}$ *шарты болғанда шығарыңыздар.*

Шешуі. Есептің шешуі 1-мысалдағы есептің шешу жолы сияқты орындалады. Айырмашылығы

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad X(0)=X'(l)=0$$

шекаралық шарттарында өзгеретін $X(x)$ функциясына спектральды есепті шешуде ғана болады.

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

жалпы шешімнен шекаралық шарттарды қолдану арқылы алатынымыз:

$$X(0) = A = 0, \quad X'(l) = \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Демек, λ-ға қатысты теңдеудің түрі:

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0,$$

оның шешімі мынаған тең:

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Сәйкес келетін меншікті функциялардың түрі:

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

$\lambda = 0$ санына X нөлдік шешімі сәйкес келгендіктен, $\lambda = 0$ саны меншікті мән болмайды.

$\lambda = \lambda_n$ жағдайында

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t + B_n\sin\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t.$$

Есептің жалпы шешімі мынадай қатар түрінде жазылуы мүмкін:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t + B_n\sin\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}. \quad (7.14)$$

(7.14) жалпы шешімінен $u(x,0)=\sin\frac{5\pi x}{2l}$, $u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2l}$ бастапқы шарттарын қолдана отырып, мынаған ие боламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=\sin\frac{5\pi x}{2l},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot\frac{(2n-1)a\pi}{2l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Берілген Фурье қатарына функциялардың жіктелулерінен, $A_3=1$, $B_1=\frac{2l}{a\pi}$ коэффициенттерінен басқа A_n, B_n коэффициенттерінің барлығы нөлге тең болатындығын аламыз. Демек,

$$u(x,t)=\cos\frac{5a\pi t}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l}+\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

$u_t(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2l}$ болғанда есептің шешімі болмайды. Бұл бастапқы шарт $u(0,t)=0$ шекаралық шартымен келісті емес болғандықтан, осыдан барып уақыттың кез келген моментінде $u_t(0,t)=0$ болуы тиіс.

3-мысал. $u_{tt}=u_{xx}$, $0\le x\le l$, $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$ $u(x,0)=x$, $u_t(x,0)=1$, *есебін шығарыңыздар.*

Шешуі. $X''(x)+\lambda X(x)=0$, $X'(0)=X'(l)=0$ спектрлік есебінің

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,\ldots$$

тривиалды емес шешімі болады.

Бұл жағдайда $X_0=1$ меншікті функциясы сәйкес келетін $\lambda=0$ саны меншікті мән болып табылады. $T''(t)=0$-ден

$T = A_0 + B_0 t$ шығатындықтан, бұл меншікті шешімнің уақыттан тәуелділігінің тербеліссіз сипаты болады. Есептің жалпы шешімінің түрі мынадай:

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l} t + \mathrm{B}_n \sin\frac{n\pi}{l} t \right)\cos\frac{n\pi x}{l} \cdot$$

Бастапқы шарттарды қолданып, A_n, B_n бастапқы шарттардағы функцияларының Фурье қатарына жіктелудің коэффициенттері болып табылатындығын көреміз:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = x, \quad B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n \cdot \frac{n\pi}{l} \cos\frac{n\pi x}{l} = 1 \cdot$$

A_n, B_n-ді есептеп, мыналарды аламыз:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x dx = \frac{l}{2}, \quad B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l dx = 1, \quad B_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l} dx = 0,$$

$n = 1,2,\ldots,$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l x \cos\frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2l}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1,2,\ldots, \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 (2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Сонымен, есептің дербес шешімін келесі түрде табамыз:

$$u(x,t) = t + \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi t}{l}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l} \cdot$$

Тұрақты жылдамдықпен ығысатын ішек орта жағдайға қатысты теңселеді. Бастапқы шарты $u_x(0,0) = u_x(l,0) = 1 \neq 0$ шекаралық шартын қанағаттандырмайтындығын көреміз. Бірақ қатар шешімге жинақты болады, x бойынша туындыны есептеу үшін оны мүшелеп, дифференциалдауға болмайды. Мүшелеп дифференциалдағанда пайда болатын қатар $t = x = 0$ болғанда жинақсыз.

Біртекті емес теңдеулер

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l \qquad (7.15)$$

тербелістің біртекті емес теңдеуін

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \qquad (7.2)$$

бастапқы және

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0 \qquad (7.3)$$

біртекті шекаралық шарттарымен қарастырайық.

(7.15), (7.2), (7.3) есебінің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

қосындысы түрінде іздейміз, мұндағы $v(x,t)$ – (7.3) шекаралық шарттарын және

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0$$

нөлдік бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (7.15) біртекті емес теңдеуінің шешімі, ал $w(x,t)$ – (7.3) шекаралық шарт және (7.2) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (7.1) біртекті теңдеуінің шешімі.

v шешімі ішектің еріксіз тербелісін көрсетеді (бұл тербелістер бастапқы қобалжулар болмағанда сыртқы қобалжыған күштің әсерімен болады), ал w шешімі ішектің еркін тербелістерін көрсетеді (олар бастапқы қобалжулармен шартталған).

Біртекті емес теңдеудің шешімін біртекті теңдеудің шешімін іздеу сияқты қатарға жіктелу түрінде іздеуге болады. (7.7), (7.8) есебінің меншікті функциялары бойынша v функциясын

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{7.16}$$

қатарына жіктелуі түрінде іздейміз.

(7.16)-ны (7.15)-ке қою арқылы мынаны аламыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = f(x,t). \tag{7.17}$$

$f(x,t)$ функциясын $(0,l)$ интервалында

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{7.18}$$

синус бойынша Фурье қатарына жіктеп және (7.17) , (7.18) салыстырып

$$T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \tag{7.19}$$

дифференциалдық теңдеуін аламыз, мұндағы

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi \quad (n=1,2,\ldots).$$

$$T_n(0)=0, \quad T_n'(0)=0 \quad (n=1,2,\ldots), \tag{7.20}$$

нөлдік бастапқы шарттарда (7.19) теңдеуін шешіп, $T_n(t)$-ны табамыз, ал одан кейін (7.16) формуласының көмегімен v-ны анықтаймыз. (7.20) шарттары бойынша (7.19) теңдеуінің $T_n(t)$ шешімдерін мына түрде көрсетуге болады:

$$T_n(t)=\frac{2}{a\pi n}\int_0^t\left[\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{a\pi n}{l}(t-\tau)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\right]d\tau \cdot \qquad (7.21)$$

(7.15), (7.2), (7.3) есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

мұндағы $T_n(t)$ функциялары (7.21) формуласы арқылы, ал a_n және b_n коэффициенттері

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad b_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

формулалары арқылы анықталады.

4-мысал. $u_{tt}=u_{xx}+b\ shx$, $0\le x\le l$,

$u(0,t)=u(l,t)=u(x,0)=u_t(x,0)=0$,

біртекті емес теңдеу үшін шекаралық есепті шығару керек.

Шешуі.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (7.22)$$

түріндегі $u(x,t)$ функциясы шекаралық шарттарды қанағаттандырады.

$A_n(t)$-ді анықтау үшін $b\ shx$-ті қатарға (7.18) формуласы бойынша жіктейміз: $f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$, мұндағы $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi$ $(n=1,2,\ldots)$, сонда мынаны аламыз:

$$b\, shx = -2b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\pi \cdot sh\, l}{(n\pi)^2 + l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (7.23)$$

(7.22), (7.23) өрнектерін теңдеуге қойып және $\sin\frac{n\pi x}{l}$ функциясының ортогональдығын ескере отырып, қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін:

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n = -2b\frac{(-1)^n n\pi \cdot sh\, l}{(n\pi)^2 + l^2}, \quad n = 1,2,\ldots \qquad (7.24)$$

және $u(x,t)$ функциясына қойылған бастапқы шарттардан шығатын бастапқы шарттарын

$$A_n(0) = \left.\frac{dA_n(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad n = 1,2,\ldots \qquad (7.25)$$

аламыз.

(7.24) теңдеуінің жалпы шешімінің түрі:

$$A_n(t) = -2bl^2\frac{(-1)^n \cdot sh\, l}{n\pi\left[(n\pi)^2 + l^2\right]} + C_n\sin\frac{\pi n t}{l} + D_n\cos\frac{\pi n t}{l}.$$

(7.25) шарттарын қолданып,

$$D_n = 2bl^2\frac{(-1)^n \cdot sh\, l}{n\pi\left[(n\pi)^2 + l^2\right]}, \quad C_n = 0$$

коэффициенттерін табамыз. (7.22)-ге $A_n(t)$ -ді қойып, келесіні аламыз:

$$u(x,t)=2bl^2 sh\,l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi\left(n^2\pi^2+l^2\right)}\left(\cos\frac{\pi nt}{l}-1\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \quad (7.26)$$

Есепті шешудің басқа тәсілі оны екі есепке бөлуден тұрады.

$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ болсын. Онда $w(x)$ функциясына үшін

$$w_{xx}=-b\;shx,\quad w(0)=w(l)=0 \quad (7.27)$$

стационарлық шекаралық есепті, ал $v(x,t)$ функциясына

$$v_{tt}=v_{xx},$$

$$v(0,t)=v(l,t)=0,$$

$$v(x,0)=-w(x),\quad v_t(x,0)=0 \quad (7.28)$$

біртекті теңдеуі үшін шекаралық есепті аламыз.

Алдымен, (7.27) стационарлық шекаралық есепті шешеміз. $w_{xx}=-b\;shx$ есебінің жалпы шешімі $w(x)=-b\,shx+C_1x+C_2$ түрінде болады. $w(0)=w(l)=0$ шекаралық шарттарын қолданып, $C_1=\dfrac{b\,shl}{l}$, $C_2=0$ коэффициенттерін табамыз, сонымен, $w(x)=b\left(\dfrac{x}{l}sh\,l-shx\right)$.

Одан кейін (7.28) есебінің шешімін Фурье әдісімен табамыз:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi t}{l}+B_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

мұндағы

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l w(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{2b}{l}\int_0^l\left(\frac{x}{l}sh\,l - shx\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2bl^2 sh\,l\cdot(-1)^n}{n\pi\left(n^2\pi^2 + l^2\right)},$$

$$B_n = 0\cdot$$

Онда

$$u(x,t) = b\left(\frac{x}{l}sh\,l - shx\right) + 2bl^2 sh\,l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi\left(n^2\pi^2 + l^2\right)}\cos\frac{\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}. \quad (7.29)$$

Физикалық тұрғыдан қарағанда бұл шешім мынаны білдіреді: $b\,shx$ сыртқы күшінің әсерімен $w(x)$ ішектің стационарлық майысуын береді; $v(x,t)$ стационарлық майысуға қатысты тербелісті бейнелейді. Ішектің стационарлық майысуы (7.29)-да айқын түрде алынғанын, ал (7.26)-да қатарға жіктелу түрін байқаймыз.

Тербеліс теңдеуі үшін жалпы бірінші шеттік есептер

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (7.15)$$

теңдеуінің

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \qquad (7.2)$$

бастапқы және

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0 \qquad (7.30)$$

шекаралық шарттарымен берілген шешімін табу керек.

(7.15), (7.2), (7.30) есебінің шешімін мына түрде іздейміз:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

мұндағы $w = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$ – (7.30)-да берілген шекаралық шарттарды қанағаттандыратын функция.

Онда $v(x,t)$ функциясы $v(0,t) = v(l,t) = 0$ нөлдік шекаралық шарттарын, $v_{tt} = a^2 v_{xx} + f_1(x,t)$ теңдеуін, мұндағы $f_1(x,t) = f(x,t) - (w_{tt} - a^2 w_{xx})$ және келесі бастапқы шарттарды

$$v\big|_{t=0} = \varphi(x) - w\big|_{t=0}, \qquad v_t\big|_{t=0} = \psi(x) - w_t\big|_{t=0} \tag{7.31}$$

қанағаттандырады. v функциясы үшін (7.15), (7.2), (7.3) типтегі есебін алдық.

5-мысал.

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{7.32}$$

біртекті емес гиперболалық типті теңдеуі үшін

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x \tag{7.33}$$

бастапқы шарттарында және

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = t \tag{7.34}$$

шекаралық шарттарында аралас есепті шешіңіздер.

Шешуі. (7.34) шекаралық шарттарын қанағаттандыратындай w функциясын таңдап аламыз. $w = xt$ (жалпы жағдайда $w(x,t)$ функциясын $w(x,t) = (\alpha_1 x + \beta_1)\mu_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\mu_2(t)$ түрінде іздеу керек; одан соң $w(x,t)$ функциясы шеттік шарттарды қанағаттандыратындай етіп, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ коэффициенттерін анықтау керек). Онда $w_{tt} = w_{xx}$, $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = x$.

Осыдан барып

$$v(x,t) = u(x,t) - xt \tag{7.35}$$

функциясы

$$v_{tt} = v_{xx} + 2t \tag{7.36}$$

теңдеуін,

$$v(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0 \tag{7.37}$$

біртекті шекаралық шарттарды және

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0 \tag{7.38}$$

нөлдік бастапқы шарттарды қанағаттандырады.

(7.37), (7.38) шарттарында $v_{tt} = v_{xx}$ біртекті теңдеуінің шешімі үшін айнымалыларды ажырату әдісін қолданып, $v(x,t) = X(x)T(t)$ деп аламыз. Келесі Штурм – Лиувилль есебіне келеміз:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Бұл есепті шешу арқылы оның $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0,1,2,\ldots$ меншікті мәндерін және оларға сәйкес

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x \tag{7.39}$$

меншікті функцияларын табамыз.

(7.36) – (7.38) есебінің шешімін

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x \tag{7.40}$$

қатары түрінде іздейміз, мұндағы

$$T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0. \tag{7.41}$$

(7.40)-ғы $v(x,t)$ функциясын (7.36) теңдеуіне қойып,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 T_n(t)\right]\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x = 2t \tag{7.42}$$

аламыз.

$T_n(t)$ функциясын табу үшін 1 функциясын Фурье қатарына $(0,1)$ интервалында (7.39) функциясының жүйесі бойынша жіктейміз:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x. \tag{7.43}$$

$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x\,dx = \frac{1}{2}$ болғандықтан,

$$a_n = 2\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x\,dx = \frac{4}{\pi(1+2n)}$$

және (7.42), (7.43) формулаларынан

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 T_n(t) = \frac{8t}{\pi(1+2n)}, \tag{7.44}$$

аламыз.

(7.44) теңдеуінің жалпы шешімі мынадай түрде болады:

$$T_n(t) = \frac{32t}{\pi^3(1+2n)^3} + A\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)t + B\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)t.$$

(7.41) шартын қолданып, $B = 0$, $A = -\dfrac{64}{\pi^4(1+2n)^4}$ аламыз.

$$T_n(t) = \frac{32t}{\pi^3(1+2n)^3} - \frac{64}{\pi^4(1+2n)^4}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)t$$

функциясын (7.40) формуласына қойып және (7.35)-ті қолданып, ізделініп отырған (7.32) – (7.34) есебінің шешімін табамыз:

$$u(x,t) = xt + \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2n)^4}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)t - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)t\right]\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x.$$

2. Параболалық типті теңдеулер

$0 < x < l$ біртекті жіңішке стержендегі жылудың таралуы туралы есепті қарастырайық, оның бүйір бет жағы жылудан қорғалған, ал $x = 0$ және $x = l$ соңдары нөлдік температурада қосталады. Бұл есеп

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{7.46}$$

жылуөткізгіштік теңдеуінің

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{7.47}$$

бастапқы шартында және

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{7.48}$$

шекаралық шарттарындағы шешімі ізделінетін есепке келтіріледі.

Айнымалыларды ажырату әдісін қолданып, нөлге тепе-тең емес, (7.46) теңдеуінің дербес шешімдерін

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{7.49}$$

түрінде іздейміз.

(7.49)-ғы u функциясын (7.46) теңдеуге қойып және айнымалыларды ажыратып, мынаны аламыз:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \qquad (7.50)$$

мұндағы λ – кез келген тұрақты.

(7.50)-ден екі теңдеуді аламыз:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \qquad (7.51)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad (7.52)$$

(7.49) түріндегі (7.47) шекаралық шартын

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \; u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

қанағаттандыратын, (7.46) теңдеуінің тривиалды емес шешімін табу үшін

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \qquad (7.53)$$

шарттарын қанағаттандыратын (7.52) теңдеуінің тривиалды емес шешімдерін табу қажет.

Қарастырылған (7.52), (7.53)-ші *Штурм – Лиувилль* есебіне келеміз (1 п. қ.).

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

тең болатын λ мәндері үшін және осы мәндер үшін ғана (7.52), (7.53) есебінің $X_n(x)$ тривиалды емес шешімі бар болады, бұл меншікті мәндерге

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

меншікті функциялары сәйкес келеді.

$\lambda = \lambda_n$ мәндеріне (7.51) теңдеуінің келесі шешімдері сәйкес келеді:

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t},$$

мұндағы A_n – кез келген тұрақты.

$X_n(x)$ және $T_n(t)$ функцияларын (7.49) формуласына қойып, (7.48) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын, (7.46) теңдеуінің

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

дербес шешімдерін табамыз.

(7.47) шартын қанағаттандыратын (7.46) теңдеуінің жалпы шешімін

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l} \tag{7.54}$$

қатары түрінде іздейміз.

(7.54)-тен және (7.47)-нің бастапқы шартынан

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l} \tag{7.55}$$

функциясын табамыз, мұндағы $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$.

Соңдары берілген t-дан тәуелді температурада қолдайтын стержендегі жылудың таралуы туралы есепте шекаралық шарттары келесі түрдегідей болады:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \qquad (7.56)$$

Бұл жағдайда (7.46), (7.47), (7.56) есебінің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

түрінде іздеуге болады, мұндағы w функциясы $w = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$ формуласы арқылы анықталады.

6-мысал.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad (7.46)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (7.47)$$

$$u_x(0,t) - h_1[u(0,t) - u_1] = 0,$$

$$u_x(l,t) + h_2[u(l,t) - u_2] = 0 \qquad (7.57)$$

есебін шығару керек, мұндағы $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

Шешуі. (7.46), (7.47), (7.57) есебінің шешімін

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $v(x)$ функциясы

$$v'(0) - h_1[v(0) - u_1] = 0, \; v'(l) + h_2[v(l) - u_2] = 0. \qquad (7.58)$$

(7.57) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын, $v''(x) = 0$ (7.46) теңдеуінің шешімі.

$v''(x) = 0$ теңдеуінің

$$v(x) = C_1 x + C_2 \tag{7.59}$$

жалпы шешімі болады.

(7.58) шарттарынан C_1 және C_2 анықтап, мыналарды табамыз:

$$C_1 = \frac{h_1 h_2 (u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + h_1 h_2 l}, \quad C_2 = u_1 + \frac{C_1}{h_1}. \tag{7.60}$$

$w(x,t)$ функциясы (7.46) теңдеуін,

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = \varphi(x) - v(x) \equiv \tilde{\varphi}(x) \tag{7.61}$$

бастапқы шартын және келесі біртекті шекаралық шарттарды:

$$w_x(0,t) - h_1 \cdot w(0,t) = 0, \; w_x(l,t) + h_2 \cdot w(l,t) = 0 \tag{7.62}$$

қанағаттандырады, мұндағы $v(x)$ функциясы (7.59), (7.60) формулаларынан анықталады.

(7.46), (7.61), (7.62) есебін айнымалыларды ажырату әдісімен шығарып,

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \tag{7.63}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{7.64}$$

теңдеулерін және

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \qquad X'(l) + h_2 X(l) = 0 \tag{7.65}$$

шекаралық шарттарын аламыз.

(7.64), (7.65) *Штурм – Лиувилль* есебіне келеміз. (7.64) теңдеуінің жалпы шешімінің түрі:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Шекаралық шарттар мыналарды береді:

$$X'(0) - h_1 X(0) = B\lambda - h_1 A = 0,$$
$$X'(l) + h_2 X(l) = (h_2 B - A\lambda)\sin\lambda l + (B\lambda + h_2 A)\cos\lambda l = 0,$$

осыдан

$$\lambda_n^{\ 2} = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots \qquad (7.66)$$

табамыз, мұндағы μ_n: $\quad ctg\,\mu = \dfrac{\mu^2 - h_1 h_2 l^2}{\mu l(h_1 + h_2)}$ теңдеуінің оң түбірлері.

λ_n (7.66) меншікті мәндеріне

$$X_n(x) = \frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_n}{l}x$$

меншікті функциялары сәйкес келеді.

λ_n (7.66) меншікті мәндеріне (7.63) теңдеуінің келесі шешімдері сәйкес келеді:

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t},$$

мұндағы A_n – кез келген тұрақты.

Сонымен, (7.62) шекаралық шартын қанағаттандыратын (7.46) теңдеуінің

$$w_n(x,t) = A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} X_n(x) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2 t}\left(\frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_n}{l}x\right),$$

дербес шешімдерін табамыз.

Онда

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2 t}\left(\frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x+h_1\sin\frac{\mu_n}{l}x\right).$$

A_n коэффициенттерін (7.61) бастапқы шартынан

$$\tilde{\varphi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x+h_1\sin\frac{\mu_n}{l}x\right),$$

$[0,l]$-да $X_n(x)$ функциясының ортогональдығын қолданып, табамыз:

$$A_n=\frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int_0^l\tilde{\varphi}(x)\left(\frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x+h_1\sin\frac{\mu_n}{l}x\right)dx,$$

мұндағы

$$\|\Phi_n\|^2=\int_0^l\left(\frac{\mu_n}{l}\cos\frac{\mu_n}{l}x+h_1\sin\frac{\mu_n}{l}x\right)^2dx.$$

7-мысал. $u_t=a^2u_{xx}-\beta u$, $0\le x\le l, u(0,t)=u_x(l,t)=0$, $\lambda_3=\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)$ *шеттік есебін шығару керек.*

Шешуі. Есепті меншікті функциялары бойынша қатарға жіктеу арқылы шығаруға болады. Есепті шешудің басқа тәсілі $u=e^{-\beta t}v$ ауыстыруын жасаудан тұрады. Сонда v функциясы үшін $v_t=a^2v_{xx}$ біртекті теңдеуін және u функциясының шекаралық және бастапқы шарттары сияқты шарттарын

$$v(0,t)=v_x(l,t)=0,\quad v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2l}$$

аламыз.

v функциясы үшін Фурье әдісімен есепті шешіп аламыз

$$v(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi x}{2l}\cdot$$

$u = e^{-\beta t} v$ ауыстыруын ескере отырып, мынаған ие боламыз:

$$u(x,t) = e^{-\beta t-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi x}{2l}\cdot$$

8-мысал. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{l}$, $0 \le x \le l$

$u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$ *шеттік есебін шығару керек.*

Шешуі. Есепті меншікті функциялары бойынша қатарға жіктеу арқылы шығаруға болады. Есепті шешудің басқа тәсілі шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

түрінде іздеу болып табылады, мұндағы $w(x)$ –

$$a^2 w_{xx} - \beta w + \sin\frac{\pi x}{l} = 0, \quad w(0) = w(l) = 0,$$

есебінің шешімі.

$w(x)$ стержень бойымен температураның стационарлық таралуын береді. Шекаралық шарттарды қанағаттандыратын біртекті емес сызықтық теңдеудің дербес шешімі

$$w = \left(\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 + \beta\right)^{-1} \sin\frac{\pi x}{l}$$

түрінде болады.

$v+w$ -ті алғашқы теңдеуге және шарттарға қойып, $v(x,t)$ функциясы үшін $v_t = a^2 v_{xx} - \beta v$, $v(0,t) = v(l,t) = 0$, $v(x,0) = -w(x)$есебін аламыз, оны 7-інші мысалдағы есепті шешу тәсілімен шығарып, келесіні аламыз

$$u = \left(\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 + \beta\right)^{-1}\left[1 - e^{-\left(\beta + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\right)t}\right]\sin\frac{\pi x}{l}.$$

3. Эллипстік типті теңдеулер. Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін айнымалыларды ажырату әдісі

Шеттік есептерді қарапайым аймақтар жағдайында (дөңгелек, дөңгелек сақина, тіктөртбұрыш және т.б.) айнымалыларды ажырату әдісімен алуға болады.

Тіктөртбұрыштағы Дирихленің шеттік есебі

$\Pi = [0,a]\times[0,b]$ тіктөртбұрышында Лаплас теңдеуі үшін шеттік есепті қарастырамыз:

$$\Delta u(x,y) \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,\quad 0 < x < a,\quad 0 < y < b, \tag{7.67}$$

$$u(0,y) = \varphi(y),\quad u(a,y) = \psi(y), \tag{7.68}$$

$$u(x,0) = f(x),\quad u(x,b) = g(x). \tag{7.69}$$

Шешімді

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) \tag{7.70}$$

түрінде іздейміз, мұндағы $u_1(x,y)$ –

$$\Delta u_1(x,y) = 0,\quad 0 < x < a,\quad 0 < y < b,$$

$$u_1(0,y)=0, \quad u_1(a,y)=0, \tag{7.71}$$
$$u_1(x,0)=f(x), \quad u_1(x,b)=g(x)$$

есебінің шешімі, ал $u_2(x,y)$ –

$$\Delta u_2(x,y)=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$$
$$u_2(0,y)=\varphi(y), \quad u_2(a,y)=\psi(y), \tag{7.72}$$
$$u_2(x,0)=0, \; u_2(x,b)=0,$$

есебінің шешімі.

(7.71) есебінің шешімін

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{\pi nx}{a} \tag{7.73}$$

түрінде іздейміз.

Онда $x=0$ және $x=a$ болғандағы шеттік шарттар (7.71) есебінде орындалады.

(7.73) функциясын $\Delta u_1(x,y)=0$ теңдеуіне қоямыз. $Y_n(y)$ үшін

$$-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_n(y)+Y_n''(y)=0, \quad 0<y<b \tag{7.74}$$

теңдеуін аламыз.

(7.73) алмастыруын $y=0$ және $y=b$ болғандағы (7.71) есебінің шеттік шартына қойғанда, алатынымыз:

$$Y_n(0)=f_n \equiv \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx,$$
$$Y_n(b)=g_n \equiv \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx. \tag{7.75}$$

(7.74) теңдеуінің жалпы шешімі

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n}{a} y} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a} y} \qquad (7.76)$$

түрінде болады.

A_n және B_n коэффициенттері (7.75) шеттік шарттарынан табылады:

$$A_n + B_n = f_n, \quad A_n e^{\frac{\pi n}{a} b} + B_n e^{-\frac{\pi n}{a} b} = g_n. \qquad (7.77)$$

Бұл жүйені шешіп, мынаны табамыз:

$$A_n = \frac{1}{e^{\frac{\pi n}{a} b} - e^{-\frac{\pi n}{a} b}} \left(g_n - f_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{a} b} \right) = \frac{1}{2 sh \frac{\pi n}{a} b} \left(g_n - f_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{a} b} \right),$$

$$B_n = \frac{1}{e^{\frac{\pi n}{a} b} - e^{-\frac{\pi n}{a} b}} \left(f_n \cdot e^{\frac{\pi n}{a} b} - g_n \right) = \frac{1}{2 sh \frac{\pi n}{a} b} \left(f_n \cdot e^{\frac{\pi n}{a} b} - g_n \right). \qquad (7.78)$$

(7.71) есебінің шешімі (7.73), (7.76), (7.78) формулалары арқылы беріледі.

Егер x және y орындарын айырбастасақ, (7.72) есебі түрі бойынша (7.71) есебінен айырмашылығы жоқ. Сондықтан $u_2(x, y)$ функциясын

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{\pi n y}{b} \qquad (7.79)$$

түрінде іздеу қажет.

Онда

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{\pi n}{b}x} + D_n e^{-\frac{\pi n}{a}x}. \qquad (7.80)$$

Мұндағы

$$C_n = \frac{1}{2sh\frac{\pi n}{b}a}\left(\psi_n - \varphi_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{b}a}\right),$$

$$D_n = \frac{1}{2sh\frac{\pi n}{b}a}\left(\varphi_n \cdot e^{\frac{\pi n}{b}a} - \psi_n\right).$$

Егер f, g – $[0,a]$-да екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар, ал φ, ψ – $[0,b]$-да екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болса, онда $u_1(x,y)$ және $u_2(x,y)$, сонымен бірге $u(x,y)$ – сәйкес шеттік шарттарға қанағаттандыратын Π-дағы үзіліссіз функциялар.

9-мысал. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < l$, $0 < y < \infty$, $u(0,y) = u(l,y) = 0$, $u(x,0) = A\dfrac{(l-x)x}{l^2}$, $u(x,\infty) = 0$ *шеттік есебін шығару керек.*

Шешуі. Есептің шешімін $u(x,y) = X(x)Y(y)$ түрінде іздейміз және айнымалыларды ажырату арқылы

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

аламыз.

X координатасы бойынша спектрлік есептің түрі:

$$X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Бұл есептің меншікті мәні $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1,2,\dots$ Осы меншікті мәндерге $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ меншікті функциялары сәйкес келеді.

y-тен тәуелділік

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

теңдеуінен алынады, ал оның шешімі

$$Y_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n e^{\frac{n\pi y}{l}}$$

түрінде беріледі.

Есептің шешімін

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}} + B_n e^{\frac{n\pi y}{l}}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

қатары түрінде жазамыз, $y \to \infty$ шекаралық шартынан барлық n үшін $B_n = 0$ аламыз, $y = 0$ болғандағы шекаралық шартынан A_n есептейміз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l} = A\frac{(l - x)x}{l^2},$$

$$A_n = \frac{2A}{l^3}\int_0^l (lx - x^2)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = -\frac{4A}{(\pi n)^3}[(-1)^n - 1]$$

немесе $A_k = \frac{8A}{\pi^3 (2k+1)^3}, \quad n = 2k + 1, \quad k = 0,1,\dots,$

және ақырында мынаны аламыз:

$$u(x,t)=\frac{8A}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\exp\left(-\frac{(2k+1)\pi}{l}y\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

Дөңгелек үшін Дирихле есебінің шешімі:

$x^2+y^2<R^2$ дөңгелегінің ішінде

$$\Delta u=0. \tag{7.81}$$

Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын және дөңгелектің шекарасында

$$u\big|_{\rho=R}=f(\varphi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi \tag{7.82}$$

берілген мәндерді қабылдайтын $u(\rho,\varphi)$ функциясын табу керек.

(7.67) теңдеуі (ρ,φ) поляр координаталарында

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \text{ немесе}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\quad 0<\rho<R,\quad 0\le\varphi<2\pi \tag{7.83}$$

түрінде болады.

(7.83) теңдеуінің дербес шешімдерін

$$u=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\not\equiv 0 \tag{7.84}$$

түрінде іздейміз.

(7.84) формуласын (7.83) теңдеуіне қойып аламыз:

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right)}{\dfrac{R(\rho)}{\rho}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda,$$

мұндағы $\lambda = const$. Осыдан келесі екі теңдеуді аламыз:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \tag{7.85}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) - \lambda R(\rho) = 0\cdot \tag{7.86}$$

(7.85) теңдеуінің жалпы шешімі

$\lambda > 0$ болғанда $\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$,

$\lambda < 0$ болғанда $\Phi = Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$

түрінде болады.

u шешімі $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$ бірмәнді болу керек, сондықтан φ-дің 2π-ге өзгеруі Φ-дің мәнін өзгертпеуі тиіс: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. $\lambda < 0$ болғанда тек нөлдік шешім ғана периодты. $\lambda > 0$ болғанда Φ функциясы 2π периодымен периодты, егер $\sqrt{\lambda} = n$ (n – бүтін сан) болса. Меншікті шешімдер

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi$$

түрінде болады.

(7.86) теңдеуі біртекті. Оның $\lambda = n^2$ болғандағы шешімін $R(\rho) = \rho^\alpha$ түрінде іздеп,

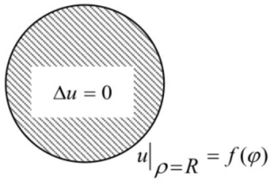
$$\alpha^2 = n^2 \text{ немесе } \alpha = \pm n \ (n > 0)$$

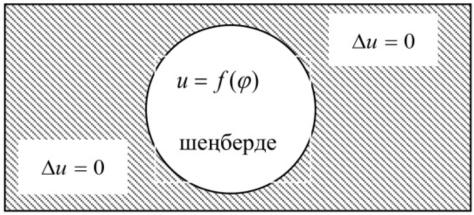
аламыз.

$n \neq 0$ жағдайында екі сызықтық тәуелсіз ρ^n және ρ^{-n} шешімдері болады, осыдан:

$$R_n(\rho) = a\rho^n + b\rho^{-n}.$$

$n = 0$ $(\lambda = 0)$ болғандағы (7.86) теңдеуінің жалпы шешімі тікелей интегралдау арқылы алынады, $R_0(\rho) = C_0 \ln \rho + C$ табамыз.





5-сурет. а) Дирихленің ішкі есебі; ә) Дирихленің сыртқы есебі

Дирихленің ішкі есебін шығару үшін $R_n(\rho) = a\rho^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ және $R_0(\rho) = C$ алу керек, яғни $\rho \to +0$ болғанда $\rho^{-n} \to \infty$ және $\ln \rho \to -\infty$ болғандықтан, $b = 0$, $C_0 = 0$.

Дирихленің ішкі есебінің шешімін

$$u(\rho, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (7.87)$$

қатары түрінде іздейміз, мұндағы a_n және b_n коэффициенттері (7.82) шеттік шартынан анықталады:

$$C = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi.$$

(7.87) қатардың қосындысын тауып, дөңгелектің ішіндегі ішкі Дирихле есебінің шешімін Пуассон интегралы түрінде аламыз:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)}d\psi \cdot \quad (7.88)$$

Сыртқы Дирихле есебін шешу үшін $R_n(\rho)=b\rho^{-n}$ $(n=1,2,\ldots)$ және $R_0(\rho)=C$ алу керек, яғни $\rho\to+\infty$ жағдайында $\rho^n\to\infty$ және $\ln\rho\to+\infty$ болғандықтан, $a=0$, $C_0=0\cdot$

Дирихленің сыртқы есебінің шешімін

$$u(\rho,\varphi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^n}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi) \quad (7.89)$$

қатары түрінде іздейміз.

$r=R_1$ және $r=R_2$ шеңберлеріндегі берілген шеттік шарттарында $R_1<r<R_2$ аймағындағы (7.81) теңдеуінің шешімін

$$u(\rho,\varphi)=C_0\ln\rho+C+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n+\frac{A_{-n}}{\rho^n}\right)\cos n\varphi+\left(B_n\rho^n+\frac{B_{-n}}{\rho^n}\right)\sin n\varphi\right] (7.90)$$

қатары түрінде іздейміз.

10-мысал. *Дирихле есебі үшін $a<b$ радиустары бар өстері бір цилиндрдің арасындағы потенциал үлестірімін табу:*

$$u(a,\varphi)=c,\ u(b,\varphi)=h\cos\varphi\cdot$$

Шешуі. Жалпы шешім

$$u(r,\varphi)=A_0\ln r+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_nr^n+\frac{A_{-n}}{r^n}\right)\cos n\varphi+\right.$$

$$\left.\left(B_nr^n+\frac{B_{-n}}{r^n}\right)\sin n\varphi\right]$$ қосындысы түрінде жазылуы мүмкін.

A_n, B_n коэффициенттері шекаралық шарттардың Фурье қатарына жіктелуімен есептеледі.

Берілген шекаралық шарттарға қатар келесі түрдегідей ықшамдалады:

$$u(r,\varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \left(A_1 r + \frac{A_{-1}}{r} \right) \cos\varphi \cdot$$

$r = a$ болғанда $A_0 \ln a + B_0 = c$, $A_1 a + \frac{A_{-1}}{a} = 0 \cdot$

$r = b$ болғанда $A_0 \ln b + B_0 = 0$, $A_1 b + \frac{A_{-1}}{b} = h \cdot$

Алынған теңдеулер жүйесіндегі коэффициентерді есептеп, аламыз:

$$u(r,\varphi) = c\frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} + h\frac{b(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)r}\cos\varphi \cdot$$

Бақылау сұрақтары:

1. Фурье әдісімен ішектің аз тербелісінің теңдеуі қалай интегралданады? Шешім қандай түрде ізделінеді?
2. Фурье әдісімен шектелген стержендегі жылу таралуының теңдеуі қалай интегралданады?
3. Қандай мәндер меншікті деп аталады? Қандай функциялар меншікті деп аталады?

Жаттығулар

1. Фурье әдісімен кесіндіде ішектің тербеліс теңдеуі үшін

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$
$$u\,\big|_{t=0} = x(x-2), \quad u_t\,\big|_{t=0} = 0, \quad u\,\big|_{x=0} = 0, \quad u\,\big|_{x=2} = 0$$

шеттік есебін шығару керек.

Жауабы: $u(x,t) = -\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2k-1)\pi t}{2}$.

2. $0 < x < l, \quad t > 0$ жарты жолағында $u_t = a^2 u_{xx}$,

$$u(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = At, \quad u_x(l,t) = T \cdot$$

Фурье әдісімен жылуөткізгіштік теңдеуі үшін аралас есепті шығару керек.

Жауабы: $u(x,t) = -\frac{a^2 A}{2l}t^2 - \left(\frac{A}{2l}x^2 - Ax + \frac{Al}{3} - \frac{a^2 T}{l}\right)t + \frac{T}{2l}x^2 - \frac{lT}{6} + \cdot$

$$+\frac{2l}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\left\{Al^2 - \left[Al^2 + (-1)^k T(ak\pi)^2\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}\cdot$$

3. $D: \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$ тіктөртбұрышында $\Delta u = 0$ Лаплас теңдеуінің шешімін табу керек, егер ол контурда

$$u\big|_{x=0} = Ay(b-y), \quad u\big|_{x=a} = 0, \quad 0 \le y \le b,$$
$$u\big|_{y=0} = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

берілген мәндерді қабылдаса және де шекаралық функцияның үзіліссіздігін қамтамасыз ететін

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(b) = \psi_1(0),$$
$$\varphi_1(0) = \psi_0(a), \quad \varphi_1(b) = \psi_1(a),$$

шарттары орындалса.

Жауабы:

$$u(x,y) = B\frac{sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3 sh\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

Нұсқау. Есепті екі есепке бөлу керек:

1) $\Delta u_1 = 0$, $0 < x < a,\quad 0 < y < b$,
$u_1(0, y) = \varphi_0(y)$, $u_1(a, y) = \varphi_1(y)$,
$u_1(x,0) = 0$, $u_1(x,b) = 0$;

2) $\Delta u_2 = 0$, $0 < x < a,\quad 0 < y < b$,
$u_2(0, y) = 0$, $u_2(a, y) = 0$,
$u_2(x,0) = \psi_0(x)$, $u_2(x,b) = \psi_1(x)$.

Сонда $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ функциясы берілген Дирихле есебінің шешімі болады.

Интегралдық түрлендірулер әдісі

Берілген нақты немесе комплекстік $f(t)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады:

1) $f(t)$ – барлық жерде үзіліссіз немесе ақырлы сан бірінші текті үзіліс нүктелері бар болады;

2) барлық t үшін $|f(t)| < M e^{s_0 t}$ болатындай, $M > 0$ және $s_0 > 0$ тұрақтылары бар болады, мұндағы t $(0 \le t < \infty)$ – нақты айнымалы.

Осындай жорамалдарда $\operatorname{Re} p > s_0$ нақты бөлігімен барлық p үшін

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad (8.1)$$

интегралы бар болады және $\operatorname{Re} p > s_0$ жарты жазықтығында $p = s + i\sigma$ комплекстік айнымалысының аналитикалық функциясын көрсетеді.

$F(p)$ функциясы $f(t)$ функциясының *Лаплас түрлендіруі*, ал $f(t)$ *түпнұсқа-функция* деп аталады.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp, \qquad (8.2)$$

мұндағы $a > s_0$ тұрақтысы – *Лапластың кері түрлендіруінің* формуласы.

$f(x)$ функциясы барлық x нақты мәндері үшін анықталса,

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \tag{8.3}$$

Фурье интегралдық түрлендіруі енгізіледі.

1-шарттың орындалған жағдайында Фурье турлендіруі бар болуы үшін $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ интегралының абсолютті жинақтылығы жеткілікті.

Түпнұсқа – функциясы, яғни $f(x)$ функциясы, өзінің $F(\lambda)$ бейнесі бойынша

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \tag{8.4}$$

формуласының көмегімен қалпына келтіріледі.

(8.3) және (8.4) түрлендірулері өзара кері болып табылады.

$-\infty < x < \infty$ интервалында берілген $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының $f * g$ *үйірткісі* деп

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \tag{8.5}$$

интегралы аталады.

Егер де

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\lambda x} dx$$

Фурье түрлендірулері және

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

кері түрлендірулері бар болса, онда

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\ . \qquad (8.6)$$

1-мысал. Фурье интегралдық түрлендіруін қолданып, жылуөткізгіштік теңдеуі үшін

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u\big|_{t=0}=f(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

Коши есебін шығарыңыздар.

Шешуі.

$$U(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx, \quad F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx \qquad (8.7)$$

x айнымалысы бойынша $u(x,t)$ және $f(x)$ функцияларының Фурье түрлендіруі болсын.

$x\to\pm\infty$-да u функциясы және оның туындылары нөлге ұмтылады деп болжайық. Онда бөліктеп интегралдауды қолданып, алатынымыз:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}+\frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}u(x,t)e^{-i\lambda x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}-$$
$$-\frac{\lambda^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-i\lambda x}dx=-\lambda^2U(\lambda,t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx=\frac{dU(\lambda,t)}{dt}. \quad (8.8)$$

$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ теңдеуінің екі жағын да және $u(x,0)=f(x)$ шартын $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda x}$ -не көбейтіп және $-\infty$ -тен ∞-ке дейін x бойынша интегралдап, (8.7), (8.8) формулалары күшімен

$$\frac{dU(\lambda,t)}{dt}+a^2\lambda^2U(\lambda,t)=0 \qquad (8.9)$$

қарапайым дифференциалдық теңдеуді және

$$U(\lambda,0)=F(\lambda) \qquad (8.10)$$

шартты аламыз.

(8.10) бастапқы шартындағы (8.9) теңдеуі шешімінің түрі

$$U(\lambda,t)=F(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}.$$

Фурье кері түрлендіруінің көмегімен

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left[a\sqrt{t}\lambda-\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}\right]^2}d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}$$

($\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ Пуассон интегралы) болғандықтан, мынаны аламыз:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}e^{i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left[a\sqrt{t}\lambda-\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}\right]^2}d\lambda=$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\cdot$$

2-мысал. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ теңдеуін интегралдық түрлендірулер әдісінің көмегімен шығару керек.

Шешуі. X айнымалысы бойынша

$$U(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}dx\cdot$$

Фурье интегралдық түрлендіруін қолданып, теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+a^2\lambda^2 U=0\cdot$$

Бұл теңдеудің шешімі

$$U(\lambda,t)=A(\lambda)e^{ia\lambda t}+B(\lambda)e^{-ia\lambda t}$$

түріндей болады, мұндағы $A(\lambda)$ және $B(\lambda)$ $-\lambda$ параметрінің кез келген функциялары.

Фурье кері түрлендіруін қолданып, табамыз:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\lambda)e^{i\lambda(x+at)}+B(\lambda)e^{i\lambda(x-at)}\right]d\lambda=$$
$$=A(x+at)+B(x-at)\cdot$$

3-мысал. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < +\infty$,

$u\big|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, $-\infty < x < \infty$, Коши есебін шығару керек.

Шешуі.

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx,$$

$$F(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{-i\lambda x} dx. \qquad (8.11)$$

X айнымалысы бойынша $u(x,t)$ жəне $f(x)$ функцияларының Фурье интегралдық түрлендірулерін қолданып, алғашқы теңдеуді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \lambda^2 U = F(\lambda,t) \qquad (8.12)$$

түріне, ал бастапқы шарттарды

$$U(\lambda,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial U(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (8.13)$$

түріне келтіреміз.

(8.13) бастапқы шарттарында (8.12) теңдеуін шешіп,

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{a\lambda} \int_0^t F(\lambda,\tau) \sin a\lambda(t-\tau) d\tau \qquad (8.14)$$

функциясын аламыз.

Фурье кері түрлендіруін қолданып жəне $\sin a\lambda(t-\tau)$ функциясын $\sin a\lambda(t-\tau) = \dfrac{e^{ia\lambda(t-\tau)} - e^{-ia\lambda(t-\tau)}}{2i}$ комплекстік түрінде көрсетіп, табатынымыз

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a\lambda}\int_0^t F(\lambda,\tau)\sin a\lambda(t-\tau)d\tau\right]e^{i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda[x+a(t-\tau)]}-e^{i\lambda[x-a(t-\tau)]}\right)F(\lambda,\tau)d\lambda\cdot$$

$$\frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda[x+a(t-\tau)]}-e^{i\lambda[x-a(t-\tau)]}\right)=\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}e^{i\lambda\xi}d\xi$$

болғандықтан (8.11) көмегімен

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda,\tau)e^{i\lambda\xi}d\lambda\right]d\xi=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

формуласын аламыз.

4-мысал. Лаплас интегралдық түрлендіруінің көмегімен $u_y=u_{xx}+u+B\cos x$, $u(0,y)=Ae^{-3y}$, $u_x(0,y)=0$, $0<x<\infty$, $0<y<\infty$ есебін шығару керек.

Шешуі.

$$U(p,y)=\int_0^{\infty}e^{-px}u(x,y)dx \tag{8.15}$$

x айнымалысы бойынша $u(x,y)$ функциясының Лаплас интегралдық түрлендіруі болсын.

Онда келесі формулалар орындалады:

$$\int_0^{\infty}e^{-px}u_y(x,y)dx=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty}e^{-px}u(x,y)dx=\frac{dU(p,y)}{dy}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-px}u_x(x,y)dx=e^{-px}u(x,y)\Big|_{x=0}^{x=\infty}+p\int_0^{\infty}e^{-px}u(x,y)dx=pU(p,y)-u(0,y)$$

$$\int_0^{\infty}e^{-px}u_{xx}(x,y)dx=e^{-px}u_x(x,y)\Big|_{x=0}^{x=\infty}+pe^{-px}u_x(x,y)\Big|_{x=0}^{x=\infty}+$$

$$+p^2\int_0^\infty e^{-px}u(x,y)dx = p^2U(p,y) - p\,u(0,y) - u_x(0,y). \quad (8.16)$$

(8.15), (8.16) арқылы алғашқы есеп

$$\frac{dU(p,y)}{dy} = p^2U(p,y) - Ap\,e^{-3y} + U(p,y) + \frac{Bp}{p^2+1}$$

немесе

$$\frac{dU(p,y)}{dy} - (p^2+1)U(p,y) = -Ap\,e^{-3y} + \frac{Bp}{p^2+1} \quad (8.17)$$

теңдеуіне түрленеді.

(8.17) теңдеуінің шешімінің түрі:

$$U(p,y) = C\,e^{(p^2+1)y} + Ae^{-3y}\,\frac{p}{p^2+4} - \frac{Bp}{(p^2+1)^2},$$

мұндағы C – кез келген тұрақты.

$y > 0$ болғандықтан, $p \to \infty$ -да $U(p,y) \to 0$ шарттың күшімен $C = 0$ болуы керек, яғни

$$U(p,y) = Ae^{-3y}\,\frac{p}{p^2+4} - \frac{Bp}{(p^2+1)^2}. \quad (8.18)$$

Лаплас кері түрлендіруінің көмегімен есептің шешімін

$$u(x,t) = Ae^{-3y}\cos 2x - \frac{B}{2}x\sin x$$

түрінде аламыз.

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай интегралдық түрлендіруі Лаплас түрлендіруі деп аталады? Түпнұсқа және бейне деген не?
2. Қандай интегралдық түрлендіру Фурье түрлендіруі деп аталады?
3. Қандай формула арқылы Фурье кері түрлендіруі анықталады?

Жаттығулар

1. Фурье интегралдық түрлендіруін қолданып, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ жарты жазықтығында

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad u\big|_{t=0} = 0$$

есебін шығару керек.

Жауабы: $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi$.

2. Лаплас интегралдық түрлендіруін қолдану арқылы

$$\begin{gathered} 9u_{xx} + 4u_{tt} = 36e^{2x}\sin 3t, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \sin 3t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 3xe^{2x} \\ 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty \end{gathered}$$

есебін шығару керек.

Жауабы: $u(x,t) = xe^{2x}\sin 3t$.

МАЗМҰНЫ

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Алиев Р.Г. Сборник задач по уравнениям в частных производных. – М., 2006. – 128 с.
2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 686 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. Владимиров В.С. Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
8. Колоколов И.В. и др. Задачи по математическим методам физики. – М., 2000. – 288 с.
9. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. – М., 1993. – 155 с.
10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М., 1981. – 255 с.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 716 с.
12. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В.С. Владимирова. – М.: Физматлит, 2001. – 288 с.
13. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1976. – 127 с.
14. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1958. – 376 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

Оқу басылымы

Сәрсекеева Айгүл Сапарғалиқызы

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКАНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Оқу құралы

Редакторы *Г. Рүстембекова*
Компьютерде беттеген және
мұқабасын безендірген *Н. Базарбаева*

Мұқабаны безендіруде сурет
rus-img2.com сайтынан алынды

ИБ №8744
Басуға 19.10.2015 жылы қол қойылды. Пішімі 60х84 1/16.
Көлемі 7,5 б.т. Офсетті қағаз. Сандық басылыс. Тапсырыс №3290.
Таралымы 130 дана. Бағасы келісімді.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің
«Қазақ университеті» баспа үйі.
050040, Алматы қаласы, әл-Фараби даңғылы, 71.

«Қазақ университеті» баспа үйі баспаханасында басылды.